V. Globální Cauchyova věta, Cauchyův vzorec a jejich aplikace

V.1 Řetězce a cykly

Definice. **Řetězcem** rozumíme výraz tvaru

$$\varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \cdots \dotplus \varphi_n, \tag{$*$}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou cesty. Řetězec $(*)$ se nazývá **cykl**, pokud jsou cesty $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ uzavřené.

Nechť Γ je řetězec tvaru $(*)$. Pak definujeme

- **obraz řetězce** Γ jako
$$\langle \Gamma \rangle = \langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle \cup \cdots \cup \langle \varphi_n \rangle;$$
- **délku řetězce** Γ jako
$$V(\Gamma) = V(\varphi_1) + V(\varphi_2) + \cdots + V(\varphi_n);$$
- je-li $f : \langle \Gamma \rangle \to \mathbb{C}$ spojitá, pak **integrál funkce** f **podél** Γ jako
$$\int_\Gamma f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f + \cdots + \int_{\varphi_n} f;$$
- je-li $f : \langle \Gamma \rangle \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ spojitá, pak **přírůstek logaritmu funkce** f **podél** Γ jako
$$\Delta_\Gamma \log f = \Delta_{\varphi_1} \log f + \Delta_{\varphi_2} \log f + \cdots + \Delta_{\varphi_n} \log f.$$

Je-li Γ cykl a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$, pak **index bodu** a **vzhledem k cyklu** Γ je

$$\operatorname{ind}_\Gamma a = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z-a} \, \mathrm{d}z.$$

Jsou-li Γ_1 a Γ_2 dva řetězce, řekneme, že jsou **ekvivalentní**, jestliže $\langle \Gamma_1 \rangle = \langle \Gamma_2 \rangle$ a pro každou spojitou $f : \langle \Gamma_1 \rangle \to \mathbb{C}$ platí $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$.

Poznámky.

(1) *Je-li Γ cykl tvaru $(*)$ a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$, pak*
$$\operatorname{ind}_\Gamma a = \operatorname{ind}_{\varphi_1} a + \operatorname{ind}_{\varphi_2} a + \cdots + \operatorname{ind}_{\varphi_n} a.$$

(2) *Nechť $\varphi_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ a $\varphi_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ jsou cesty, pro které $\varphi_1(b) = \varphi_2(c)$. Pak jejich spojení $\varphi_1 \dotplus \varphi_2$ je ekvivalentní řetězci $\varphi_1 \dotplus \varphi_2$.*

(3) *Pro index bodu vzhledem k cyklu platí zřejmé analogie Větičky III.9, Věty III.10 a propichovací věty (Poznámka za Větou III.10).*

Věta 1 (o cyklu okolo kompaktu). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $K \subset \Omega$ je neprázdná kompaktní podmnožina. Pak existuje cykl Γ s vlastnostmi:*

(i) $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega \setminus K$,

(ii) $\operatorname{ind}_\Gamma z$ *nabývá na* $\mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ *pouze hodnot* 0 *a* 1,

(iii) $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$ *pro* $z \in K$,

(iv) $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$ *pro* $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$,

(v) *Pro každou f holomorfní na Ω platí*
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w, \qquad z \in K.$$