Věta V.3 $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, Γ cykl, $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$,
$\forall a \in \mathbb{C}\setminus\Omega$: $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. $M \subset \Omega$ izolovaná v Ω, $M \cap \langle\Gamma\rangle = \emptyset$

Pak $\forall f$ holomorfní v $\Omega\setminus M$ platí

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a\in M} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a f.$$

Přitom suma obsahuje jen konečně mnoho nenulových sčítanců.

Dk: $K := \langle\Gamma\rangle \cup \{z \in \mathbb{C}\setminus\langle\Gamma\rangle;\ \operatorname{ind}_\Gamma z \neq 0\}$. Pak $K \subset \Omega$ je kompaktní (viz důkaz V2).

$M_1 := M \cap K$
$M_2 := M \setminus K$

Protože M je izolovaná v Ω a K kompaktní podmnožina Ω, je M_1 konečná.

Navíc množina $\Omega_1 := \Omega\setminus M_2$ je otevřená a $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega_1$.
Navíc $\forall a \in \mathbb{C}\setminus\Omega_1$: $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$ $\left(a\in\mathbb{C}\setminus\Omega_1 \Rightarrow a \in \mathbb{C}\setminus\Omega \text{ nebo } a \in M_2\right)$

Tedy pro Ω_1 a ~~...~~ Γ platí Cauchyova věta.

Proto dle V IV.13 (resp. její verze pro cykl, která se dokazuje stejně)
je

$\forall f$ holomorfní na $\Omega\setminus M = \Omega_1\setminus M_1$:

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a\in M_1} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a f = 2\pi i \sum_{a\in M} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a f$$

pro $a \in M_2$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$

Věta V.4 $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast, Γ cykl, $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$, $\forall a \in \mathbb{C}\setminus\Omega: \operatorname{ind}_\Gamma a = 0$

f holomorfní na Ω, f nenabývá 0 na $\langle\Gamma\rangle$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\Delta_\Gamma \log f = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f} = \sum_{\substack{a\in\Omega\\ f(a)=0}} N_f(a)\cdot \operatorname{ind}_\Gamma a,$$

kde $N_f(a)$ je násobnost kořene a.

Dk: $M := \{a \in \Omega;\ f(a) = 0\}$

Dle předpokladu $M \cap \langle\Gamma\rangle = \emptyset$, tedy $M \subsetneq \Omega$. Tedy f není konstantní 0. Protože Ω je oblast, z věty o jednoznačnosti (III.21) plyne, že M je izolovaná v Ω.

Funkce $\frac{f'}{f}$ je holomorfní na $\Omega\setminus M$. Dle V3 je tedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f} = \sum_{a\in M} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a \frac{f'}{f}$$

Spočteme $\operatorname{res}_a \frac{f'}{f}$: je-li a kořen násobnosti $p \in \mathbb{N}$, pak
$f(z) = (z-a)^p g(z)$, g holomorfní na Ω, $g(a) \neq 0$
Pak $f'(z) = p(z-a)^{p-1} g(z) + (z-a)^p g'(z)$,

tedy $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ $\Rightarrow \operatorname{res}_a \frac{f'}{f} = p. = N_f(a)$

$\nwarrow$ holomorfní v bodě a

To dokončuje důkaz (srovnej s V III.9 pro cykly)