Lemma V.5 $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ dwie zamknięte ścieżki, $z \in \mathbb{C}$ takie, że $\forall t \in [a,b] : |\varphi(t) - \psi(t)| < |\varphi(t) - z|$.

Wtedy $z \in \mathbb{C} \setminus (\langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle)$ i $\mathrm{ind}_\varphi z = \mathrm{ind}_{\psi}(z)$.

Dowód:
- kiedy $z \in \langle\varphi\rangle \Rightarrow \exists t : \varphi(t) = z$. Wtedy
$$|\varphi(t) - \psi(t)| < 0 \text{, sprzeczność}$$
- kiedy $z \in \langle\psi\rangle$, wtedy ex. $t : \psi(t) = z$, więc
$$|\varphi(t) - z| < |\varphi(t) - z| \text{, sprzeczność.}$$

Zatem $z \in \mathbb{C} \setminus (\langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle)$.

Uważmy krzywą $\eta(t) = \dfrac{\psi(t) - z}{\varphi(t) - z}$, $t \in [a,b]$. To jest dobrze definiowana zamknięta ścieżka, ponadto $\forall t \in [a,b]$:

$$|\eta(t) - 1| = \left|\frac{\psi(t) - z}{\varphi(t) - z} - 1\right| = \left|\frac{\psi(t) - \varphi(t)}{\varphi(t) - z}\right| < 1$$

Zatem $\langle\eta\rangle \subset U(1,1)$. Przeto $\mathrm{ind}_\eta 0 = 0$

Zatem $0 = \mathrm{ind}_\eta 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\eta \frac{1}{w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\eta'(t)}{\eta(t)}\,dt =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\psi'(t)(\varphi(t) - z) - \varphi'(t)(\psi(t) - z)}{(\varphi(t) - z)^2} \cdot \frac{\varphi(t) - z}{\psi(t) - z}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left(\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} - \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - z}\right)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\psi \frac{1}{w - z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{w - z}\,dw$$

$$= \mathrm{ind}_\psi z - \mathrm{ind}_\varphi z.$$

Věta V.6 $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast, Γ cykl, $\langle \Gamma \rangle \subset \mathbb{C}$, $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega : \operatorname{ind}_\Gamma a = 0$

f, g holomorfní na Ω, $\forall z \in \langle \Gamma \rangle : |f(z) - g(z)| < |f(z)|$

Pak $\displaystyle\sum_{a \in \Omega, f(a)=0} N_f(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a = \sum_{a \in \Omega, g(a)=0} N_g(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a.$

Dk: $\boxed{1}$ f ani g nenabývají 0 na $\langle \Gamma \rangle$

[$z \in \langle \Gamma \rangle$, $f(z) = 0 \Rightarrow |g(z)| < 0$ spor

$g(z) = 0 \Rightarrow |f(z)| < |g(z)|$ spor]

Tedy lze aplikovat V4. Stačí tedy dokázat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g'}{g}.$$

Protože Γ je spojení několika uzavřených cest, stačí to dokázat pro uzavřenou cestu

$\boxed{2}$ φ buď taková uz. cesta $\varphi : [a, b] \to \Omega$

$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, $z \in \langle \varphi \rangle$

Definujme dvě cesty $\eta_1 := f \circ \varphi$

$\eta_2 = g \circ \varphi$

Pak $\forall t \in [a, b] : |\eta_1(t) - \eta_2(t)| < |\eta_1(t)|$

Dle L5 je tedy

$$\operatorname{ind}_{\eta_1} 0 = \operatorname{ind}_{\eta_2} 0$$

Přičemž $\displaystyle\operatorname{ind}_{\eta_1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta_1} \frac{1}{z} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\eta_1'(t)}{\eta_1(t)} \, dt =$

$\displaystyle= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))} \cdot \varphi'(t) \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f'}{f}.$

Podobně $\displaystyle\operatorname{ind}_{\eta_2} 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{g'}{g}$ a důkaz je hotov.

Věta V.7 $K \subset \mathbb{C}$ kompaktní, $\Omega = \operatorname{Int} K$. $f, g : K \to \mathbb{C}$ spojité, holomorfní na Ω

$\forall z \in \partial K : |f(z) - g(z)| < |f(z)|$

$$\Rightarrow \sum_{a \in \Omega,\, f(a)=0} N_f(a) = \sum_{a \in \Omega,\, g(a)=0} N_g(a)$$

Dk: $\boxed{1}$ f ani g nenabývá 0 na ∂K ⌈stejně jako V6⌋

$\boxed{2}$ $L := \{ z \in K ;\ |f(z) - g(z)| \geq |f(z)| \}$

$\Rightarrow$ L je kompaktní podmnožina Ω, navíc L obsahuje všech nulových f i g.

$\boxed{3}$ Nechť Γ je „cykl okolo L v Ω" dle V1. Pak ~~$\forall$~~ Γ splňuje předpoklady V6, až na to, že Ω nemusí být souvislá. Proto budeme uvažovat každou komponentu Ω zvlášť

$\boxed{4}$ Nechť G je nějaká komponenta Ω. Pokud $G \cap L = \emptyset$, pak f ani g nemají nulových v G.
Pokud $G \cap L \neq \emptyset$, pak $L_G := G \cap L$ je kompaktní podmnožina G ⌈G je otevřená a zároveň uzavřená v Ω⌋
Nechť Γ_G je cykl v G okolo L_G.
Pak lze použít V6, a tedy

$$\sum_{a \in G,\, f(a)=0} N_f(a) = \sum_{\substack{a \in G \\ g(a)=0}} N_g(a)$$ ⌈$\operatorname{ind}_{\Gamma_G} a = 0$ pro $a \in L_G$ dle V1(iii)⌋

Sečteme-li přes všech komponent $G \subset \Omega$, pro které $G \cap L \neq \emptyset$ (těch je konečně mnoho, díky kompaktnosti L), dostaneme závěr.