GONIOMETRICKÉ A HYPERBOLICKÉ FUNKCE, DŮKAZ VĚTY II. 4

$$\left.\begin{aligned}
\cos(z) &:= \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}\\
\sin(z) &:= \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}\\
\cosh(z) &:= \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}\\
\sinh(z) &:= \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}
\end{aligned}\right\}\ \text{pro } z\in\mathbb{C}$$

Vlastnosti:

(1) Funkce cos, sin, cosh, sinh jsou definovány na $\mathbb{C}$

[protože exp je def. na $\mathbb{C}$]

cos, cosh jsou sudé

sin, sinh jsou liché [jasné z definic]

(2) $\cos(0)=\cosh(0)=1$, $\sin(0)=\sinh(0)=0$

[Dle (E2) je $\exp(0)=1$, stačí tedy dosadit]

(3) Funkce cos, sin, cosh, sinh jsou holomorfní na $\mathbb{C}$,

pro $z\in\mathbb{C}$: $\cos'(z)=-\sin(z)$, $\sin'(z)=\cos(z)$, $\cosh'(z)=\sinh(z)$, $\sinh'(z)=\cosh(z)$

[Dle (E1) je exp holomorfní na $\mathbb{C}$ a $\exp' z=\exp z$ pro $z\in\mathbb{C}$. Proto podle pravidel počítání s derivacemi jsou všechny čtyři funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ a platí:

$$\cos'(z)=\frac{i\exp(iz)+(-i)\cdot\exp(-iz)}{2}=-\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}=-\sin z$$

$$\sin' z = \frac{i\exp(iz) - (-i)\exp(-iz)}{2i} = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \cos(z)$$

$$\cosh' z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sinh(z)$$

$$\sinh' z = \frac{\exp(z) - (-1)\cdot\exp(-z)}{2} = \cosh(z).$$ ⌋

(4) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\cosh(iz) = \cos z$, $\sinh(iz) = i\sin z$

$$\exp(iz) = \cos z + i\sin(z)$$

⌈ první dvě rovnosti plynou ihned dosazením do definic

třetí: $\cos z + i\sin z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} + i\,\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} =$

$= \exp(iz)$ ⌋

(5) $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

⌈ Dosadíme do definic:

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{2} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Pro n liché: $\frac{i^n+(-i)^n}{2} = i^n \frac{(1+(-1)^n)}{2} = 0$

pro n sudé, $n=2k$ $\quad \frac{i^{2k}+(-i)^{2k}}{2} = \frac{i^{2k}+i^{2k}}{2} = i^{2k} =$

$= (i^2)^k = (-1)^k.$

To dává kýžený vzorec.

$$\sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n-(-i)^n}{2} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Pro n sudé $\frac{i^n-(-i)^n}{2i} = 0$

pro n liché, $n=2k+1$: $\frac{i^{2k+1}-(-i)^{2k+1}}{2i} = \frac{i^{2k}\cdot i-(-i)\cdot(-i)^{2k}}{2i}$

$= \frac{i^{2k}+i^{2k}}{2} = i^{2k} = (-1)^k.$

To dává kýžený vzorec

$$\cosh z = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1+(-1)^n}{2}}_{=1 \text{ pro } n \text{ sudé};\ 0 \text{ pro } n \text{ liché}} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sinh z = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1-(-1)^n}{2}}_{\substack{0 \text{ pro } n \text{ sudé} \\ 1 \text{ pro } n \text{ liché}}} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

(6) Funkce cos, sin, cosh, sinh nabývají na $\mathbb{R}$ reálných hodnot.

[Plyne ihned ze vzorců (5)]

(7) $\forall z, w \in \mathbb{C}$: $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$

$$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$$

$$\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$$

[Použijeme (E3) a definici:

$$\cosh(z+w) = \frac{1}{2}\left(\exp(z+w) + \exp(-z-w)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\exp(z)\exp(w) + \exp(-z)\exp(-w)\right)$$

Podobně $\sinh(z+w) = \frac{1}{2}\left(\exp(z)\exp(w) - \exp(-z)\exp(-w)\right)$

Dále $\cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) =$

$$\frac{1}{4}\left(\exp(z)+\exp(-z)\right)\left(\exp(w)+\exp(-w)\right) + \frac{1}{4}\left(\exp(z)-\exp(-z)\right)\cdot\left(\exp(w)-\exp(-w)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\exp(z)\exp(w) + \exp(z)\exp(-w) + \exp(-z)\exp(w) + \exp(-z)\exp(-w)\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\exp(z)\exp(w) - \exp(z)\exp(-w) - \exp(-z)\exp(w) + \exp(-z)\exp(-w)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\exp(z)\exp(w) + \exp(-z)\exp(-w)\right)$$

To dává vzorec pro cosh

$$\sinh(z)\cosh(w) = \frac{1}{4}\left(\exp(z) - \exp(-z)\right)\left(\exp(w) + \exp(-w)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\exp(z)\exp(w) + \exp(z)\exp(-w) - \exp(-z)\exp(w) - \exp(-z)\exp(-w)\right)$$

Prohozením z a w:

$$\cosh(z)\sinh(w) = \frac{1}{4}\Big(\exp(z)\exp(w) + \exp(w)\exp(-z) - \exp(-w)\exp(z) - \exp(-z)\exp(-w)\Big)$$

Sečtením: $\sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w) =$

$$= \frac{1}{2}\big(\exp(z)\exp(w) - \exp(-z)\exp(-w)\big)$$

To dává vzorec pro sinh

Vzorce pro cos a sin odvodíme pomocí (4):

$$\cos(z+w) = \cosh(iz+iw) = \cosh(iz)\cosh(iw) + \sinh(iz)\sinh(iw) =$$

$$= \cos(z)\cos(w) + i\sin(z)\cdot i\sin(w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$\sin(z+w) = \frac{1}{i}\sinh(iz+iw) = \frac{1}{i}\big(\sinh(iz)\cosh(iw) + \cosh(iz)\sinh(iw)\big)$$

$$= \frac{1}{i}\big(i\sin z\cos w + \cos z\cdot i\sin w\big) = \sin z\cos w + \cos z\cdot\sin w$$

(8) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

Aplikujme vzorce pro cos a cosh z (7) na $w = -z$. Pak tedy (díky (2)):

$$1 = \cos 0 = \cos(z+(-z)) = \cos(z)\cdot\cos(-z) - \sin(z)\cdot\sin(-z) \overset{(1)}{=} \cos^2 z + \sin^2 z$$

$$1 = \cosh 0 = \cosh(z+(-z)) = \cosh(z)\cosh(-z) + \sinh(z)\sinh(-z) \overset{(1)}{=} \cosh^2 z - \sinh^2 z$$

(9) $\cos 2 < 0$; definujme $\pi := 2\cdot\min\{x>0;\ \cos(x)=0\}$.

Pak $\pi < 4$

$$\cos 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{4}{2!} + \frac{16}{4!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 - 2 + \frac{16}{24} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{2k-1}\, 2^{4k-2}}{(4k-2)!} + \frac{(-1)^{2k}\, 2^{4k}}{(4k)!} \right) =$$

$$= -\frac{1}{3} + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{4k-2}}{(4k-2)!} \left(-1 + \underbrace{\frac{4}{4k(4k-1)}}_{<1} \right)}_{\leq 0} \leq -\frac{1}{3} < 0$$

Máme tedy $\cos 2 < 0$, $\cos 0 = 1 > 0$, cos je spojitá a reálná na $[0,2] \Rightarrow \exists\, x \in (0,2) : \cos(x) = 0$ (Bolzanova věta o nabývání mezihodnot). Protože cos je spojitá, existuje takové nejmenší x ($\{x \in [0,2],\ \cos x = 0\}$ je neprázdná kompaktní podmnožina intervalu $(0,2)$).

Definice π je tedy korektní, protože $\cos 2 < 0$, víme $\pi \leq 4$.

(10) sin je na $[0, \frac{\pi}{2}]$ rostoucí a konkávní
cos je na $[0, \frac{\pi}{2}]$ klesající a ~~konk~~ konkávní
$\sin \frac{\pi}{2} = 1$

Víme, že $\cos x > 0$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, sin spojitá na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin' x = \cos x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ (obojí plyne z (3))

$\Rightarrow \sin' x > 0$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$

Protože $\sin(0) = 0$, dostáváme dále $\sin x > 0$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

Protože $\cos' x = -\sin x < 0$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ a cos je spojitá na $[0, \frac{\pi}{2}]$ (viz (3)), je cos klesající na $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\sin'' x = -\sin x < 0$, $\cos'' x = -\cos x < 0$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$
$\Rightarrow$ sin i cos jsou konkávní na $[0, \frac{\pi}{2}]$

Nakonec speciálně $\sin\frac{\pi}{2}$:

Výše jsme ukázali, že $\sin\frac{\pi}{2} > 0$
Protože $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, z (8) plyne, že $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$

Kombinací těchto dvou věcí dostáváme $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ⌋

(11) $\cos(\pi) = -1$, $\sin\pi = 0$

⌈ víme $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, z (7) tedy plyne

$$\sin\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$
$$\cos\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1$$ ⌋

(12) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\cos(z+\pi) = -\cos z$, $\sin(z+\pi) = -\sin z$

⌈ z (11) a (7) plyne

$$\cos(z+\pi) = \cos z \cdot \underbrace{\cos\pi}_{=-1} - \sin z \cdot \underbrace{\sin\pi}_{=0} = -\cos z$$

$$\sin(z+\pi) = \sin z \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + \cos z \cdot \underbrace{\sin\pi}_{=0} = -\sin z$$ ⌋

(13) $\sin$, $\cos$ jsou periodické s periodou 2π
$\sinh$, $\cosh$, $\exp$ jsou periodické s periodou $2\pi i$

⌈ Tvrzení pro $\sin$, $\cos$ plyne z (12) : $\sin(z+2\pi) = -\sin(z+\pi) = \sin z$
$\cos(z+2\pi) = -\cos(z+\pi) = \cos z$

Tvrzení pro $\sinh$, $\cosh$ a $\exp$ plyne z tvrzení pro $\sin$ a $\cos$ a z (4) a (1)
protože z (4), (1) plyne:

$$\cosh(z) = \cos\left(\frac{z}{i}\right) = \cos(-iz) = \cos(iz)$$
$$\sinh(z) = i\sin\left(\frac{z}{i}\right) = i\sin(-iz) = -i\sin(iz)$$
$$\exp(z) = \cos\left(\frac{z}{i}\right) + i\sin\left(\frac{z}{i}\right) = \cos(iz) - i\sin(iz)$$ ⌋

(14) $z, w \in \mathbb{C}$. Pak $\exp(z) = \exp(w) \iff z - w$ je celočíselný násobek $2\pi i$

[$\Leftarrow$ plyne z (13)

$\Rightarrow$ Nechť $z, w \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(w)$. Vynásobme obě strany $\exp(-w)$ a dostaneme

$$\exp(z)\exp(-w) = \exp(w)\exp(-w)$$

$$\exp(z-w) \qquad\qquad \exp(w-w) = \exp(0) = 1$$

Tedy $\exp(z-w) = 1$. Označme $x = \mathrm{Re}(z-w)$, $y = \mathrm{Im}(z-w)$

Pak $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+iy) = 1$

tedy $1 = |1| = |\exp(x+iy)| \overset{(E7)}{=} \exp x$

Tedy $x = 0$ (exp je rostoucí na $\mathbb{R}$ a $\exp 0 = 1$) ... viz (E6), (E2))

$\Rightarrow \exp(iy) = 1 \Rightarrow \cos y + i \sin y \overset{(4)}{=} 1$

Protože $\cos y, \sin y \in \mathbb{R}$ (díky (6)), máme $\cos y = 1$, $\sin y = 0$

Díky 2π-periodicitě funkcí sin a cos (viz (13)) stačí najít řešení v intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$

Víme, že $\sin 0 = 0$, $\sin > 0$ na $(0, \frac{\pi}{2}]$, sin lichý $\Rightarrow \sin < 0$ na $[-\frac{\pi}{2}, 0)$

Díky (12) máme $\sin > 0$ na $[\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin < 0$ na $(\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

Tedy jediné dvě hodnoty $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ splňující $\sin y = 0$ jsou 0 a π. Přitom $\cos 0 = 1$ a $\cos\pi = -1$.

Proto jediné $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ splňující $\cos y = 1$, $\sin y = 0$ je $y = 0$.]

(15) $z \in \mathbb{C}$: $\sin z = 0 \iff z$ je celočíselný násobek π

Γ $\Leftarrow$ plyne z (2) a (12)

$\Rightarrow$ $\sin z = 0 \Rightarrow \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = 0 \Rightarrow \exp(iz) = \exp(-iz)$

$\overset{(14)}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} : iz - (-iz) = 2k\pi i$

tj. $2iz = 2k\pi i$

tj. $z = k\pi$ $\rfloor$

(16) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Γ $\subset$: plyne z (E4)

$\supset$: Nechť $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak $|w| > 0$,

existuje tedy $\alpha \in \mathbb{R}$ splňující $\exp(\alpha) = |w|$
(dů. (E6))

Ukážeme, že existuje $\beta \in \mathbb{R}$ splňující $\exp(\alpha + i\beta) = w$
To je totéž jako
$\exp(i\beta) = \frac{w}{|w|}$, tj. $\cos\beta + i\sin\beta = \frac{w}{|w|}$

Nechť $\frac{w}{|w|} = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Pak $x^2 + y^2 = 1$
$\left(\left|\frac{w}{|w|}\right| = 1 \right)$

$y \in [-1, 1] \Rightarrow \exists \beta_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \sin\beta_0 = y$
[sin je spojitá reálná fce na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ dle (10), $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ dle (10), (1)]]

dík (8) a $x^2 + y^2 = 1$ máme $\cos^2\beta_0 = x^2$

$\Rightarrow \cos\beta_0 = x$ nebo $\cos\beta_0 = -x$.

Pokud $\cos\beta_0 = x$, vezmeme $\beta = \beta_0$

$\cos\beta_0 = -x \Rightarrow \beta = \pi - \beta_0$ $\left(\cos(\pi - \beta_0) = -\cos(-\beta_0) = -\cos\beta_0 = x \right.$
$\left. \sin(\pi - \beta_0) \underset{(12)}{=} -\sin(-\beta_0) \underset{(1)}{=} \sin\beta_0 = y \right)$ $\rfloor$