Cesta a integrál podle cesty:

Def: $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta, pokud

- φ je spojitá
- existuje dělení $a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = b$, že $\forall j \in \{1,\dots,n\}$: φ' existuje a je spojitá na (s_{j-1}, s_j), v krajních bodech má konečné limity (jednostranné)

Pozn: φ je cesta $\Rightarrow$ φ' existuje až na konečně mnoho bodů a φ' je omezená

⌈ $\forall j \in \{1,\dots,n\}$: φ' po dodefinování jednostrannými limitami je spojitá na $[s_{j-1}, s_j]$, a tedy omezená. ⌋

Def: $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ buď cesta, $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá ($\langle\varphi\rangle = \varphi([a,b])$)

$$\Rightarrow \int_\varphi f := \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

kde integrál vpravo je zobecněný Riemannův,

$$\text{tj } \int_\varphi f = \sum_{j=1}^{n} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \underbrace{f(\varphi(t))\,\varphi'(t)}\,dt$$

fce spojitá a omezená na (s_{j-1}, s_j)

nebo (ekvivalentně) Lebesgueův,

⌈ $f\circ\varphi$ je spojitá na $[a,b]$, tedy i omezená
$\exists M \subset [a,b]$ konečná, že φ' je spojitá a omezená na $[a,b]\setminus M$
$\Rightarrow (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ je spojitá a omezená na $[a,b]\setminus M$,
tedy omezená měřitelná fce definovaná skoro všude,
proto Lebesgueovsky integrovatelná ⌋

Poznámky

(1) φ cesta $\Rightarrow$ $V(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt$

[$V(\varphi) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{m} |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| \;;\; m \in \mathbb{N},\ a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \right\}$

Nechť $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ je dělení z definice cesty.

Pak

$$V(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} V(\varphi \restriction [s_{j-1}, s_j])$$

(standardní cvičení se supremy)

($\geq$ jasné

$\leq$ navíc Δ-nerovnost)

Interpretujeme-li $\mathbb{C}$ jako $\mathbb{R}^2$, plyne vzorec ze známého vzorce pro délku křivky v $\mathbb{R}^2$]

(2) Vztah ke křivkovému integrálu druhého druhu:

Připomeňme, že křivkový integrál druhého druhu je definován

$$\int_\varphi f\,d\varphi = \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle\,dt$$

, kde $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je cesta, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ je skalární součin v $\mathbb{R}^2$

Křivkový integrál v $\mathbb{C}$ … $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ buď cesta, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$

$f : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ buď spojitá

$f(x+iy) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$

$\tilde{f} = (f_1, f_2)$

$$\int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

Počítejme:

$$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = \big(f_1(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) + i f_2(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\big)(\varphi_1'(t)+i\varphi_2'(t))$$

$$= f_1(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\,\varphi_1'(t) - f_2(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\cdot\varphi_2'(t)$$
$$+ i\,\big(f_2(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\,\varphi_1'(t) + f_1(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\,\varphi_2'(t)\big)$$

$$= \langle (f_1(\varphi_1(t),\varphi_2(t)), -f_2(\varphi_1(t),\varphi_2(t))), (\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))\rangle$$

$$+ i\,\langle (f_2(\varphi_1(t),\varphi_2(t)), f_1(\varphi_1(t),\varphi_2(t))), (\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))\rangle.$$

Uvědomme-li si, že $\tilde{f} = (f_1, f_2)$, $\tilde{\bar{f}} = (f_1, -f_2)$, $\widetilde{i\bar{f}} = (f_2, f_1)$, pak vidíme, že

$$\int_\varphi f = \int_\varphi \tilde{\bar{f}}\,d\varphi + i\int_\varphi \widetilde{i\bar{f}}\,d\varphi \qquad \lrcorner$$

(3) Vyjádření podle Hausdorffy míry: (φ cesta, $\varphi'(t) \neq 0$ až na konečně mnoho t)

Dle (2) máme:

$$\int_\varphi f = \int_\varphi \tilde{\bar{f}}\,d\varphi + i\int_\varphi \widetilde{i\bar{f}}\,d\varphi \overset{\text{(definice integrálu 2. druhu)}}{=}$$

$$= \int_a^b \langle (f_1(\varphi(t)), -f_2(\varphi(t))), (\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))\rangle\,dt +$$
$$i\int_a^b \langle (f_2(\varphi(t)), f_1(\varphi(t))), (\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))\rangle\,dt =$$

$$= \int_a^b \langle (f_1(\varphi(t)), -f_2(\varphi(t))), (\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))\rangle\,\frac{\|(\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))\|}{\|(\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))\|}\,dt$$

$$+ i \int_a^b \left\langle (f_2(\varphi(t)), f_1(\varphi(t))), (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)) \right\rangle \cdot \frac{\|(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t))\|}{\|(\varphi_1'(t)\, \varphi_2'(t))\|} \, dt$$

$$\underset{\text{area formule}}{=} \int_{\langle\varphi\rangle} \left\langle (f_1(z), f_2(z)), \frac{(\varphi_1'(\varphi^{-1}(z)), \varphi_2'(\varphi^{-1}(z)))}{\|(\varphi_1'(\varphi^{-1}(z)), \varphi_2'(\varphi^{-1}(z)))\|} \right\rangle d\mathcal{H}^1(z)$$

$$+ i \int_{\langle\varphi\rangle} \left\langle (f_2(z), f_1(z)), \frac{(\varphi_1'(\varphi^{-1}(z)), \varphi_2'(\varphi^{-1}(z)))}{\|(\varphi_1'(\varphi^{-1}(z)), \varphi_2'(\varphi^{-1}(z)))\|} \right\rangle d\mathcal{H}^1(z)$$

$$= \int_{\langle\varphi\rangle} \left\langle (-f_2(z), f_1(z)), \frac{(\varphi_2'(\varphi^{-1}(z)), -\varphi_1'(\varphi^{-1}(z)))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(z))|} \right\rangle d\mathcal{H}^1(z)$$

$$+ i \int_{\langle\varphi\rangle} \left\langle (f_1(z), -f_2(z)), \frac{(\varphi_2'(\varphi^{-1}(z)), -\varphi_1'(\varphi^{-1}(z)))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(z))|} \right\rangle d\mathcal{H}^1(z)$$

$$= \int_{\langle\varphi\rangle} \langle i\widetilde{f}(z), \nu(z) \rangle \, d\mathcal{H}^1(z) + i \int_{\langle\varphi\rangle} \langle \overline{f}(z), \nu(z) \rangle \, d\mathcal{H}^1(z).$$

Přitom $\|\nu(z)\| = 1$ a $\nu(z) \perp (\varphi_1'(\varphi^{-1}(z)), \varphi_2'(\varphi^{-1}(z)))$, je to tedy normálový vektor.

(pokud $\varphi'(\varphi^{-1}(z)) \neq 0$, což platí až na konečně bodů)