Věta III.6 $I \subset \mathbb{R}$ interval, $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast

$F: I \times \Omega \to \mathbb{C}$ nechť splňuje podmínky

(1) $\forall z \in \Omega \quad t \mapsto F(t,z)$ je měřitelná na I

(2) Pro skoro všechna $t \in I$ má fce $z \mapsto F(t,z)$ spojitou derivaci podle komplexní proměnné na Ω

(3) $\exists z_0 \in \Omega : t \mapsto F(t,z_0)$ je integrovatelná na I

(4) $\forall z \in \Omega \; \exists U$ okolí z (obsažené v Ω) $\exists h$ integrovatelná na I, že pro s.v. $t \in I: \forall w \in U \left|\frac{\partial F(t,w)}{\partial z}\right| \leq h(t)$

Pak fce $g(z) = \int_I F(t,z)\,dt$, $z \in \Omega$,

je holomorfní na Ω a platí

$$g'(z) = \int_I \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\,dt, \quad z \in \Omega.$$

Důkaz:

Krok 1 Uvažme ztotožnění $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Tedy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a $\tilde{F}: I \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ je takové, že

$$F(t, x+iy) = \tilde{F}_1(t,x,y) + i\,\tilde{F}_2(t,x,y).$$

Připomeňme, že dle Věty I.3 a předpokladu (2) platí:

pro s.v. $t \in I$ je $\frac{\partial F}{\partial z}(t, x+iy) = \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x}(t,x,y) + i\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x}(t,x,y)$

pro $x+iy \in \Omega$

a $\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x}(t,x,y) = \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial y}(t,x,y)$

$\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial y}(t,x,y) = -\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x}(t,x,y)$

speciálně fce $\tilde{F}(t,\cdot,\cdot)$ je C^1 na Ω

Krok 2: Nechť $U = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \subset \Omega$ splňuje

(a) $\exists\, h$ integrovatelná na I, že

pro s.v. $t \in I$ $\forall\, z = x + iy = (x, y) \in U$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) \right| \le h(t)$$

$$\left(\sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x}(t, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x}(t, y)\right)^2} \right)$$

(b) $\exists\ z_0 = (x_0, y_0) \in U$, že $t \mapsto F(t, z_0)$ je integrovatelná na I

Pak platí následující:

Krok 2.1 Funkce $G_j(y) = \int_I \tilde{F}_j(t, x_0, y)\, dt$, $j = 1, 2$

jsou třídy C^1 na (γ, δ) a $G_j'(y) = \int_I \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial y}(t, x_0, y)\, dt$,

$y \in (\gamma, \delta)$

⌈ Použijeme větu o $\boxed{\text{spojitosti a}}$ derivaci integrálu podle parametru

- $\forall y \in (\gamma, \delta)$: $t \mapsto \tilde{F}_j(t, x_0, y)$ je měřitelná
- $y_0 \in (\gamma, \delta)$, $t \mapsto \tilde{F}_j(t, x_0, y_0)$ je integrovatelná
- Pro s.v. t: $y \mapsto \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial y}(t, x_0, y)$ je spojitá na (γ, δ)

a $\left| \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial y}(t, x_0, y_0) \right| \le h(t)$

Tedy věta o derivaci integrálu podle parametru dává, že G_j je definovaná na (γ, δ) a vzorec pro derivaci funkce G_j. Z věty o spojitosti integrálu podle parametru plyne, že G_j' je spojitá na (γ, δ). ⌋

Krok 2.2. Pro $j=1,2$ a každé $y \in (\gamma, \delta)$ je funkce

$$H_j^y(x) = \int_I \tilde{F}_j(t, x, y)\, dt \quad \text{třídy } C^1 \text{ na } (\alpha, \beta)$$

$$\text{a} \quad (H_j^y)'(x) = \int_I \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial x}(t, x, y)\,, \quad x \in (\alpha, \beta)$$

⌈ Použijeme opět větu o spojitosti a derivaci integrálu podle parametru, podobně jako v bodě 2.1 je:

- $\forall x \in (\alpha, \beta)$: $t \mapsto \tilde{F}_j(t, x, y)$ je měřitelná
- $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $t \mapsto \tilde{F}_j(t, x_0, y)$ je integrovatelná (dle kroku 2.1)
- Pro s.v. $t \in I$: $x \mapsto \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial x}(t, x, y)$ je spojitá na (α, β)

a $\left|\frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial x}(t, x, y)\right| \leq h(t)$

Nyní stejně jako v kroku 2.1 aplikujeme větu o integrálech ⌋

Krok 2.3 Pro $j=1,2$ a každé $x \in (\alpha, \beta)$ je funkce

$$G_j^x(y) = \int_I \tilde{F}_j(t, x, y)\, dt \quad \text{třídy } C^1 \text{ na } (\gamma, \delta)$$

$$\text{a} \quad (G_j^x)'(y) = \int_I \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial y}(t, x, y)\, dt\,, \quad y \in (\gamma, \delta)$$

⌈ Plyne z kroku 2.1, kde roli x_0 hraje libovolné $x \in (\alpha, \beta)$. To je možné díky kroku 2.2 ⌋

Závěr kroku 2: Za předpokladů (a), (b) jsou

funkce $\tilde{g}_j(x,y) = \int_I \tilde{F}_j(t,x,y)\,dt$, $(x,y)\in U$,

$j=1,2$ třídy C^1 na U a platí

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x}(x,y) &= \int_I \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial x}(t,x,y)\,dt \\ \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y}(x,y) &= \int_I \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial y}(t,x,y)\,dt \end{aligned}\right\} (x,y)\in U$$

Krok 3 Nechť U je jako v kroku 2 a $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ též.

Definujme $\tilde{g}(x+iy) = \tilde{g}_1(x,y) + i\tilde{g}_2(x,y)$, $x+iy \in U \subset \mathbb{C}$ $(\mathbb{C}=\mathbb{R}^2)$,

tj. $\tilde{g}(z) = \int_I F(t,z)\,dt$, $z\in U$

Pak g je holomorfní na U a $g'(z) = \int_I \frac{\partial F(t,z)}{\partial z}\,dt$, $z\in U$

Použijeme Větu I.3 $\tilde{g}$ je C^1 na U, tedy má v každém bodě totální diferenciál.

Navíc $\frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial x}(x,y) = \int_I \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x}(t,x,y)\,dt = \int_I \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial y}(t,x,y)\,dt =$

$= \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial y}(x,y)$

$\frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial y}(x,y) = \int_I \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial y}(t,x,y)\,dt = -\int_I \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x}(t,x,y) = -\frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial x}(x,y)$

Proto g je holomorfní na U a derivace je dána oním vzorcem.

Krok 4   Z kroků 1–3 vidíme, že tvrzení platí, pokud Ω má tvar obdélníku a v bodě (4) je $U = \Omega$. Nyní buď Ω obecná oblast.

Označme $V = \{ z \in \Omega ;\ \exists\ U$ obdélníkové okolí z, že funkce g je definovaná a holomorfní na U a platí $g'(z) = \int_I \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\,dt,\ z \in U \}$

Pak zřejmě :
- V je otevřená (z definice – je-li $z \in V$, existuje ono U, zřejmě $U \subset V$)
- $V \neq \emptyset$, protože obsahuje bod z_0 (díky předpokladům lze U zvolit tak, aby obsahovalo z_0 a splňovalo podmínky kroku 2)
- $\Omega \setminus V$ je otevřená ($z \in \Omega \setminus V$ .... zvolme U obdélníkové okolí bodu z, $U \subset V$, U splňuje bod (4). Pak $U \cap V = \emptyset$. Kdyby totiž $U \cap V \neq \emptyset$, pak U splňuje předpoklady ~~kroku~~ kroku 2, a tedy $z \in U \subset V$, což je spor)

Tedy, protože Ω je souvislá, dostáváme $V = \Omega$, čímž je důkaz věty dokončen.

Poznámka: Místo I lze uvažovat lib. metrický prostor s mírou, důkaz je zcela stejný, nikde se nepoužilo, že jde právě o interval.