Věta II.13 $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená hvězdovitá, $p \in \Omega$

f holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$, spojitá na Ω

$\Rightarrow$ f má v Ω primitivní funkci

(a tedy $\forall \varphi$ uz. cestu v Ω je $\int_\varphi f = 0$)

Dk: $a \in \Omega$ buď „bod hvězdovitosti", tj. taký bod, že $\forall z \in \Omega$ úsečka $az \subset \Omega$

Definujme $F(z) = \int_{[a,z]} f$, $z \in \Omega$. Tvrdíme, že F je primitivní funkce k f na Ω.

Nechť tedy $z \in \Omega$. Zvolme $r > 0$, aby $U(z,r) \subset \Omega$.
Pak pro každé $w \in U(z,r)$: $\Delta azw \subset \Omega$

[úsečka $zw \subset U(z,r) \subset \Omega$

$x \in \Delta azw \Rightarrow x$ leží na úsečce, jejíž jeden krajní bod je a a druhý krajní bod leží na úsečce zw. Tedy $x \in \Omega$]

Pro $h \in U(0,r) \setminus \{0\}$ je

$$\frac{1}{h}\left(F(z+h) - F(z)\right) = \frac{1}{h}\left(\int_{[a,z+h]} f - \int_{[a,z]} f\right) = \frac{1}{h}\left(\int_{[a,z+h]} f + \int_{[z,a]} f\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\underbrace{\int_{\partial \Delta a,z+h,z} f}_{\substack{\shortparallel \\ 0}\ \text{V12+důsledek}} - \int_{[z+h,z]} f\right) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f \xrightarrow{h \to 0} \underset{\text{V2}}{f(z)}$$

Tedy $F'(z) = f(z)$, $z \in \Omega$, neboli F je primitivní funkce k f na Ω.

Dodatek ($\forall \varphi$ uz. cestu v Ω: $\int_\varphi f = 0$) plyne pak z V5.

Poznámka: Ω_1, Ω_2 otevřené, $\Omega_1 \cap \Omega_2$ souvislá, $f: \Omega_1 \cup \Omega_2$ má primitivní funkci na Ω_1 i na Ω_2. Pak f má primitivní funkci na $\Omega_1 \cup \Omega_2$

Γ F_1 buď p.f. na Ω_1, F_2 buď p.f. na Ω_2

Pak $(F_1 - F_2)' = 0$ na $\Omega_1 \cap \Omega_2$. $\Omega_1 \cap \Omega_2$ souvislá $\Rightarrow$ $F_1 - F_2$ konstantní na $\Omega_1 \cap \Omega_2$, označme konstantu c

Pak $F(z) = \begin{cases} F_1(z), & z \in \Omega_1 \\ F_2(z) + c, & z \in \Omega_2 \end{cases}$ je primitivní funkce na $\Omega_1 \cup \Omega_2$ $\lrcorner$

Aplikace: Ω buď otevřená podmnožina $\mathbb{C}$, kterou lze zapsat $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$, kde

- Ω_j otevřená hvězdovitá pro $j = 1, \dots, n$
- $\Omega_{j+1} \cap (\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_j)$ je souvislá pro $j = 1, \dots, n-1$

Pak každá funkce holomorfní na Ω má primitivní funkci na Ω.