Věta III.17 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in U(a, R)$

Pro $r \in (0, R)$ označme $M_r = \max\{|f(z)|;\ |z-a| = r\}$

Pak pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $|c_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$.

Dk: φ_r buď kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r.
Pak:

$$|c_n| \overset{V16}{=} \left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| \overset{V15}{=} \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\right| \overset{V1(4)}{\leq} \frac{1}{2\pi}\cdot V(\varphi_r)\cdot \frac{M_r}{r^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r \cdot \frac{M_r}{r^{n+1}} = \frac{M_r}{r^n}$$

Věta III.18 f celá fukce, omezená $\Rightarrow f$ konstantní

Dk: Dle V16 je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$

Nechť M_r je jako ve V17 (pro $a = 0$, $r \in (0, \infty)$)

Dle ~~Věta~~ předpokladu ex. $M > 0$, že $\forall r \in (0, \infty): M_r \leq M$

Dle V17 pro $n \geq 1$ je pro každé $r \in (0, \infty)$

$$|c_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

Tedy $c_n = 0$ pro $n \geq 1$, neboli $f(z) = c_0$.

Poznámka: f celá funkce, $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$. Pak f je polynom stupně menšího než n

⌈ $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$, $z \in \mathbb{C}$ dle V16

M_r jako ve V17 (či V18) pro $a = 0$, $r \in (0, \infty)$.

Předpoklad říká, že $\lim_{r \to \infty} \frac{M_r}{r^n} = 0$

Tedy pro $m \geq n$

$$|c_m| \overset{V17}{\leq} \frac{M_r}{r^m} = \underbrace{\frac{M_r}{r^n}}_{\to 0} \underbrace{\frac{1}{r^{m-n}}}_{\leq 1 \text{ pro } r > 1} \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

$\Rightarrow c_m = 0$ pro $m \geq n$

Tedy $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1}$. ⌋