Věta III.19 P polynom stupně alespoň 1 s komplexními koeficienty $\Rightarrow$ P má alespoň jeden kořen v $\mathbb{C}$

Dk: P polynom stupně alespoň 1

$$\Rightarrow P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$

Pokud P nemá kořen, pak funkce $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$, tj. je to celá funkce.

Přitom $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} =$

$$= \lim_{z\to\infty} \underbrace{\frac{1}{z^n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}}}_{\to \frac{1}{a_n}\ (a_n \neq 0!)} = 0$$

Tedy f je omezená na $\mathbb{C}$ [$\exists R > 0$, že pro $|z| > R$ je $|f(z)| < 1$ a na $\overline{U(0,R)}$ je f omezená]

$\overset{V18}{\Rightarrow}$ f konstantní $\Rightarrow f \equiv 0$ na $\mathbb{C}$ (↑ limita v ∞ je 0) a to je spor, protože $f = \frac{1}{P}$ nemůže být $\equiv 0$. ∎

Důsledek: $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$

$\Rightarrow$ existují $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$, že $P(z) = a_n (z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_n)$

Čísla $w_1, \dots, w_n$ jsou určena jednoznačně až na pořadí.

Dk Existence: $n = 1$ … $a_1 z + a_0 = a_1 \left(z + \frac{a_0}{a_1}\right)$

tedy $w_1 = -\frac{a_0}{a_1}$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a tvrzení platí pro P stupně n
Nechť

$$P(z) = a_{n+1} z^{n+1} + a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

Dle V 19 existuje $w_{n+1} \in \mathbb{C}$, že $P(w_{n+1}) = 0$

Podle věty o dělení polynomů existují polynomy Q, R, přičemž $\deg R < \deg (z - w_{n+1}) = 1$, že

$$P(z) = (z - w_{n+1}) Q(z) + R(z), \; z \in \mathbb{C}$$

Protože $\deg R < 1$, je R konstanta, značíme R

Dosazením $z = w_{n+1}$ dostaneme

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{P(w_{n+1})}} = \underbrace{(w_{n+1} - w_{n+1})}_{0} Q(w_{n+1}) + R \quad , \text{tedy } R = 0$$

Nebol $P(z) = (z - w_{n+1}) Q(z)$, $z \in \mathbb{C}$

Pokud $Q(z) = c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \dots + c_0$, pak
$(z - w_{n+1}) Q(z) = c_k z^{k+1}$ + polynom stupně $\leq k$

Protože má vyjít $P(z)$, musí být $k = n$ a $c_k = a_{n+1}$

aplikací indukčního předpokladu dostaneme, že ex. $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$, pro které

$$Q(z) = a_{n+1} (z - w_1) \dots (z - w_n)$$

Tedy $P(z) = a_{n+1} (z - w_1) \dots (z - w_n)(z - w_{n+1})$

Jednoznačnost

$P(z) = a_n(z-w_1)\cdots(z-w_n) = a_n(z-u_1)\cdots(z-u_n)$

• $w \in \mathbb{C}$ se vyskytuje mezi $w_1 \dots w_n \iff P(w) = 0$

$\iff w$ se vyskytuje mezi $u_1, \dots, u_n$

zbývá ukázat, že se tam vyskytují ve stejném počtu

$w \in \mathbb{C}$ ... nechť je k-krát mezi $w_1 \dots w_n$

a l-krát mezi $u_1, \dots, u_n$

Pak $P(z) = (z-w)^k Q_1(z) = (z-w)^l Q_2(z)$, kde $Q_1(w) \neq 0$

$Q_2(w) \neq 0$

(Q_1 je součin a_n a zbylých členů v prvním vyjádření,

↑ neobsahujících w

Q_2 v druhém vyjádření)

Když $k < l$, pak pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{w\}$ platí

$Q_1(z) = (z-w)^{l-k} Q_2(z)$

spočtením limity pro $z \to w$, dostanem

$Q_1(w) = 0$, což je spor.

Podobně když $k > l$. Tedy nutně $k = l$.

Poznámka: w je vyskytuje právě k-krát mezi $w_1, \dots, w_n$

$\iff P(w) = P'(w) = \dots = P^{(k-1)}(w) = 0 \neq P^{(k)}(w)$

[spec.: w je tam právě jednou $\iff P(w) = 0 \neq P'(w)$]

$\Rightarrow$: w je tam právě k-krát $\Rightarrow P(z) = (z-w)^k Q(z)$, $Q(w) \neq 0$

$$P^{(m)}(z) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \left((z-w)^k\right)^{(j)} \cdot Q^{(m-j)}(z) = \sum_{j=0}^{\min\{k,m\}} \binom{m}{j} k(k-1)\cdots(k-j+1) \cdot (z-w)^{k-j} \cdot Q^{(m-j)}(z)$$

Tedy $P^{(m)}(w) = 0$ pro $m < k$, $P^{(k)}(w) = k!\, Q(w) \neq 0$

$\Leftarrow$ Totiž plyne z „$\Rightarrow$": $P(w) = 0 \Rightarrow w$ je tam aspoň jednou. Nechť je tam právě l-krát. Z „$\Rightarrow$" plyne, že $l = k$.