Věta III.20 f holomorfní na $U(a,r)$, $f(a)=0$, f není konstantní nulová funkce na $U(a,r)$ $\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}$, $\exists g$ holomorfní na $U(a,r)$, $g(a)\neq 0$: $f(z)=(z-a)^p g(z)$, $z\in U(a,r)$

Dk: Dle V16 je $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z\in U(a,r)$

$f(a)=0 \Rightarrow c_0=0$

f není konstantní $0 \Rightarrow$ ex. $n\in\mathbb{N}: c_n\neq 0$

Nechť $p\in\mathbb{N}$ je nejmenší takové, že $c_p\neq 0$

Pak $f(z)=\sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^p \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}}_{g(z)}$

$g(z)$ ... g holomorfní na $U(a,r)$, $g(a)=c_p\neq 0$

Pozn: Je-li f, a, p jako ve V20, říkáme, že f má v bodě $\underline{a}$ kořen násobnosti p

Navíc platí: f má v bodě $\underline{a}$ kořen násobnosti p

$\Leftrightarrow f(a)=f'(a)=\dots=f^{(p-1)}(a)=0\neq f^{(p)}(a)$

(spec. f má v bodě $\underline{a}$ kořen násobnosti $1 \Leftrightarrow f(a)=0\neq f'(a)$)

[Nechť $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ na okolí bodu $\underline{a}$

Z důkazu V16 plyne, že f má v bodě a kořen násobnosti p, právě když $c_p\neq 0$ a $c_j=0$ pro $j<p$.

Nyní si stačí uvědomit, že $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ (viz V16)]

Věta III.21 $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast, f, g holomorfní na Ω

$M = \{z \in \Omega, f(z) = g(z)\}$ má v Ω hromadný bod

$\Rightarrow f = g$ na Ω

Dk: Označme $h := f - g$. Pak h je holomorfní na Ω

a $M = \{z \in \Omega; h(z) = 0\}$

Označme $A := \{z \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : h^{(n)}(z) = 0\}$

Pak $A \subset M$

Dále • A je relativně uzavřená v Ω

⌈ z důsledku V15 plyne, že $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $h^{(n)}$

spojitá na Ω

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (h^{(n)})^{-1}(\{0\})$$

... spojitý vzor uzavřené množiny je uzavřená množina, průnik uzavřených množin je uzavřená množina ⌋

• A je otevřená

⌈ $a \in A \Rightarrow$ ex. $r > 0$, že $U(a, r) \subset \Omega$

$$V16 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in U(a, r),$$

kde $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dle předpokladu

Tedy $f \equiv 0$ na $U(a, r)$, tudíž $U(a, r) \subset A$ ⌋

• $a \in \Omega$ je hromadný bod $M \Rightarrow a \in A$

⌈ a hromadný bod $M \Rightarrow a \in M$, protože M je rel. uzavřená,

tj. $f(a) = 0$. Pokud f je konstantní na okolí a,

pak $a \in A$. Pokud ne, pak dle V20 ex. $p \in \mathbb{N}$

a funkce g holomorfní na okolí a, že $g(a) \neq 0$

a $f(z) = (z-a)^p g(z)$ na nějakém okolí a

Protože $g(a) \neq 0$, ex. $\delta > 0$, že $U(a,\delta) \subset \Omega$ a g nenabývá 0 na $U(a,\delta)$

Protože $f(z) = (z-a)^p g(z)$, vidíme, že f nenabývá 0 na $U(a,\delta) \setminus \{a\}$, neboli $(U(a,\delta) \setminus \{a\}) \cap M = \emptyset$. Tak ovšem a není hromadným bodem M, což je spor. $\rfloor$

Závěr: A je uzavřená i otevřená v Ω. Pokud M má hromadný bod, je $A \neq \emptyset$. Tedy ze souvislosti Ω plyne $A = \Omega$. Tedy i $M = \Omega$.

Tím je důkaz proveden

Důsledek: f, g celé fce, $f = g$ na $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f = g$ na $\mathbb{C}$

$\lceil$ $\mathbb{C}$ je oblast, $\mathbb{R}$ má hromadný bod — každý bod $\mathbb{R}$ je hromadným bodem $\mathbb{R}$ $\rfloor$

Věta III.22 $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast, f holomorfní a nekonstantní na Ω $\Rightarrow$ $|f|$ nenabývá v Ω lokálního maxima

Dk: Nechť $a \in \Omega$ a $|f|$ nabývá v a lokálního maxima. Zvolme $r > 0$, aby $U(a,r) \subset \Omega$ a $|f(z)| \leq |f(a)|$ pro $z \in U(a,r)$.

Ukážeme, že f je konstantní na $U(a,r)$.

K tomu účelu zvolme $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, aby $|f(a)| = \alpha \cdot f(a)$.

(tj. $\alpha = \frac{\overline{f(a)}}{|f(a)|}$ pokud $f(a) \neq 0$

Pokud $f(a) = 0$, je $f \equiv 0$ na $U(a,r)$)

Pro každé $\rho \in (0, r)$ pak platí:

$$|f(a)| = \alpha f(a) \underset{\text{důsledek V14}}{=} \alpha \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha f(a+\rho e^{it})\,dt =$$

$$\underset{\text{rovná se to } |f(a)|, \text{ což je reálné číslo}}{=} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha f(a+\rho e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\alpha f(a+\rho e^{it})\right)dt \underset{\operatorname{Re}(z) \le |z|}{\overset{(1)}{\le}}$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\alpha f(a+\rho e^{it})|\,dt \overset{(2)}{\le} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a)|\,dt = |f(a)|$$

(2): $|\alpha| = 1$, $|f(a+\rho e^{it})| \le |f(a)|$, protože $a+\rho e^{it} \in U(a, r)$

Protože na začátku i na konci je stejné číslo $|f(a)|$, musí v (1) i v (2) platit rovnosti.

Z rovnosti v (2) plyne, že $|\alpha f(a+\rho e^{it})| = |f(a)|$ pro všechna t, tedy $|f(a+\rho e^{it})| = |f(a)|$

Z rovnosti v (1) pak plyne, že $\forall t$: $\operatorname{Re}(\alpha f(a+\rho e^{it})) = |\alpha f(a+\rho e^{it})|$, neboli $\alpha f(a+\rho e^{it}) = |\alpha f(a+\rho e^{it})|$ $\quad (\operatorname{Re} z = |z| \Rightarrow z = |z|)$

Dáme-li to dohromady, máme $\forall t$:

$$\alpha f(a+\rho e^{it}) = |\alpha f(a+\rho e^{it})| = |f(a)| = \alpha f(a),$$

neboli $f(a+\rho e^{it}) = f(a)$.

To platí pro každé t a každé $\rho \in (0, r) \Rightarrow f = f(a)$ na $U(a, r)$, neboli f je konstantní na $U(a, r)$

{ Pozn: používáme vyšší tvrzení:
Nechť u, v jsou fce spojité na $[a, b]$ & $u \le v$ na $[a, b]$, $\int_a^b u = \int_a^b v$. Pak $u = v$ na $[a, b]$ }

Závěr: Víme, že f je konstantní na $U(a,r)$. Protože $U(a,r)$ má hromadné body, je f konstantní na Ω (V21). To je spor, tedy důsledek dokázán.

Důsledek: $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená omezená, $f: \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ spojitá na $\overline{\Omega}$, holomorfní na Ω.
Pak $|f|$ nabývá svého maxima na $\overline{\Omega}$ na hranici.

Dk: $\overline{\Omega}$ omezená uzavřená, $|f|$ spojitá $\Rightarrow |f|$ nabývá svého maxima v nějakém bodě $a \in \overline{\Omega}$

Pokud $a \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$, pak $a \in \partial\Omega$ a jsme hotovi.

Nechť $a \in \Omega$. Nechť G je komponenta Ω obsahující a. Dle V10 je G otevřená. Pak $|f|$ nabývá v a lokálního maxima na G, tedy dle V22 je f na G konstantní.
f spojitá $\Rightarrow f$ konstantní i na $\overline{G}$.
Protože G je omezená a neprázdná ($a \in G$), ze souvislosti $\mathbb{C}$ plyne $\overline{G} \setminus G \neq \emptyset$. Zvolme $b \in \overline{G} \setminus G$.

Pak $b \in \partial\Omega$, $f(b) = f(a)$, tedy $|f|$ nabývá v b svého maxima.