IV. Izolované singularity, reziduová věta, Laurentovy řady

IV.1 Rozšíření $\mathbb{C}$ o ∞, Riemannova sféra

Definice. Označme $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pro $\varepsilon > 0$ položme

$$U(\infty, \varepsilon) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C}, |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}.$$

Nechť f je funkce definovaná na podmnožině $\overline{\mathbb{C}}$ s hodnotami v $\overline{\mathbb{C}}$. Řekneme, že f **má v bodě** $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ **limitu** $w \in \overline{\mathbb{C}}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé $z \in U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ platí $f(z) \in U(w, \varepsilon)$. Má-li f v bodě z_0 limitu $f(z_0)$, říkáme, že f je **spojitá v** z_0. Na $\overline{\mathbb{C}}$ dále rozšíříme operace následovně:

$$z + \infty = \infty + z = \infty - z = z - \infty = \infty \qquad \text{pro } z \in \mathbb{C},$$

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \frac{z}{0} = \infty \qquad \text{pro } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\},$$

$$\frac{\infty}{z} = \infty \qquad \text{a} \qquad \frac{z}{\infty} = 0 \qquad \text{pro } z \in \mathbb{C}.$$

Nedefinované jsou následující výrazy:

$$\infty + \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Poznámka. Operace jsou rozšířeny tak, aby platila věta o aritmetice limit s dodatkem „má-li pravá strana smysl“.

Věta 1. *Označme $\mathbb{S}_2$ jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^3$, tj.*

$$\mathbb{S}_2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}.$$

Dále definujme zobrazení $\chi : \mathbb{S}_2 \to \overline{\mathbb{C}}$ předpisem

$$\chi(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \infty, & (\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 1), \\ \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Pak χ je prosté zobrazení $\mathbb{S}_2$ na $\overline{\mathbb{C}}$ a $\chi|_{\mathbb{S}_2 \setminus \{(0,0,1)\}}$ je homeomorfismus $\mathbb{S}_2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ na $\mathbb{C}$.

Definujme dále metriku ρ^* na $\overline{\mathbb{C}}$ předpisem

$$\rho^*(z, w) = \rho_e(\chi^{-1}(z), \chi^{-1}(w)), \qquad z, w \in \overline{\mathbb{C}},$$

kde ρ_e je eukleidovská metrika na $\mathbb{R}^3$. Pak limita a spojitost funkcí z $\overline{\mathbb{C}}$ do $\overline{\mathbb{C}}$ definovaná výše se shoduje s limitou a spojitostí v metrice ρ^*.

Poznámka. Prostor $\overline{\mathbb{C}}$ se často značí $\mathbb{S}$ a nazývá se **Riemannova sféra**. Zobrazení χ se nazývá **stereografická projekce**.