Důkaz Věty IV.2

f buď holomorfní na $P(a,R) := U(a,R) \setminus \{a\}$

(1) Existuje $\rho \in (0,R)$, že f je omezená na $P(a,\rho)$.
Pak existuje vlastní $\lim_{z\to a} f(z)$. Dodefinujeme-li f v bodě a hodnotou limity, dostaneme funkci holomorfní na $U(a,R)$

[$g(z) := f(z)\cdot(z-a)$, $z\in P(a,R)$

Pak g je holomorfní na $P(a,R)$, $\lim_{z\to a} g(z) = 0$

Dodefinujme $g(a)=0$. Pak g je spojitá na $U(a,R)$ a holomorfní na $P(a,R)$, tedy holomorfní na $U(a,R)$ [Důsledek $V_{\text{III}}15$]]

g konstantní 0 na $U(a,R) \Rightarrow f$ konstantní 0 na $P(a,R)$, a tedy tvrzení je zřejmé

g není konstantní $0 \overset{V20}{\Longrightarrow} \exists\, p\in\mathbb{N}$, h holomorfní na $U(a,R)$, $h(a)\neq 0$, že $g(z)=(z-a)^p h(z)$, $z\in U(a,R)$

Pak $f(z)=(z-a)^{p-1}h(z)$, $z\in P(a,R)$, a tedy tvrzení je zřejmé.]

(2) Nechť $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$. Pak existuje právě jedno $p\in\mathbb{N}$,

pro které existuje vlastní nenulová $\lim_{z\to a}(z-a)^p f(z)$

Navíc existují jednoznačně určená čísla $a_{-p},\dots,a_{-1}\in\mathbb{C}$, $a_{-p}\neq 0$, že $f(z)-\frac{a_{-1}}{z-a}-\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}-\dots-\frac{a_{-p}}{(z-a)^p}$

má v bodě a odstranitelnou singularitu

[tj. splňuje bod (1)]

Γ $\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Rightarrow \exists\, \rho \in (0,R)$, že $\forall\, z \in P(a,\rho)$: $|f(z)| \geq 1$

Pak $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, $z \in P(a,\rho)$ je holomorfní na $P(a,\rho)$

Navíc g je omezená na $P(a,\rho)$ $(|g| \leq 1)$,

$\lim_{z\to a} g(z) = 0$ a $g \neq 0$ na $P(a,\rho)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ dodefinujeme-li $g(a) = 0$, pak g je holomorfní na $U(a,\rho)$ a má v bodě a kořen nejaké násobnosti, označme ji p.

Pak $g(z) = (z-a)^p h(z)$, kde h je holomorfní na $U(a,\rho)$, $h(a) \neq 0$

Pak $\lim_{z\to a} (z-a)^p f(z) = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^p}{g(z)} = h(a) \neq 0$.

Tím máme dokázanou existenci p. Jednoznačnost p:

Pokud $\lim_{z\to a} (z-a)^p f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, pak pro $q > p$

je $\lim_{z\to a} (z-a)^q f(z) = 0$. Proto je p jednoznačně určeno.

Existence $a_{-p}, \dots, a_{-1}$:

Nechť $\lim_{z\to a} (z-a)^p f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pak funkce

$$v(z) = \begin{cases} (z-a)^p f(z), & z \in P(a,r) \\ \lim_{z\to a} (z-a)^p f(z), & z = a \end{cases}$$

je holomorfní na $U(a,r)$ (viz (1))

V III.16 $\Rightarrow$ $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in U(a,r)$

$v(a) = c_0 \neq 0$

pak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}$, $z \in P(a,r)$.

Tedy $f(z) - c_0(z-a)^{-p} - c_1(z-a)^{-p+1} - \dots - c_{p-1}(z-a)^{-1} =$

$$= \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}}_{\text{holomorfní na } U(a,r)}$$

Tedy stačí volit $a_{-p} = c_0,\ a_{-p+1} = c_1, \dots, a_{-1} = c_{p-1}$

Jednoznačnost:

Nechť $f(z) - \frac{a_{-1}}{z-a} - \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} - \dots - \frac{a_{-p}}{(z-a)^p}$ má v a odstranitelnou singularitu a $a_{-p} \neq 0$.

Pak ex. funkce g holomorfní na $U(a,r)$, že

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-a)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-a)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + g(z), \quad z \in P(a,r)$$

Pak $a_{-p} = \lim_{z\to a} (z-a)^p f(z)$. protože $p \neq 0$, je p jednoznačně určeno (viz výše)

Tedy i a_{-p} je jednoznačně určeno. Ostatní koeficienty jsou též jednoznačně určeny, protože je lze indukcí spočítat:

$$a_{-k} = \lim_{z\to a} \left((z-a)^k \cdot \left(f(z) - \frac{a_{-k-1}}{(z-a)^{k+1}} - \dots - \frac{a_{-p}}{(z-a)^p} \right)\right)$$

(3) Pokud $\lim_{z\to a} f(z)$ neexistuje (tj. nenastane ani (1) ani (2)),

pak $\forall \rho \in (0,r)$ je $f(P(a,\rho))$ hustá v $\mathbb{C}$.

Důkaz obměnou: Nechť $f(P(a,\rho))$ není hustá v $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \exists\, w \in \mathbb{C}\ \exists\, \delta > 0 \quad f(P(a,\rho)) \cap U(a,\delta) = \emptyset$

nebuli: $|f(z) - w| \geq \delta$ pro $z \in P(a, \varrho)$

Proto fce $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ je holomorf. fce a omezená na $P(a,\varrho)$.

Dle bodu (1) má v bodě $\underline{a}$ vlastní limitu

$$u := \lim_{z \to a} g(z) \in \mathbb{C}$$

Pokud $u \neq 0$, pak $\lim_{z\to a} f(z) = \frac{1}{u} + w \in \mathbb{C}$,

tedy nastává bod (1)

Pokud $u = 0$, pak $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$. (a nastává bod (2))

Zároveň: v obou případech $\lim_{z\to a} f(z)$ existuje. $\lrcorner$