Def: f holomorfní v $P(a,R)$.

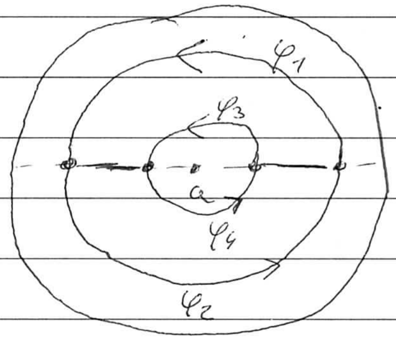
$$\operatorname{res}_a f := \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} f,$$

kde φ_ρ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru ρ a $\rho \in (0,R)$.

Poznámky (1) f spojitá na $\langle \varphi_\rho \rangle \Rightarrow$ integrál definován.

Navíc integrál nezávisí na ρ:

Nechť $0<\rho_1<\rho_2<R$



Uvažme křivky

$\varphi_1(t) = a + \rho_2 e^{it}, \ t\in[0,\pi]$

$\varphi_2(t) = a + \rho_2 e^{it}, \ t\in[\pi,2\pi]$

$\varphi_3(t) = a + \rho_1 e^{it}, \ t\in[0,\pi]$

$\varphi_4(t) = a + \rho_1 e^{it}, \ t\in[\pi,2\pi]$

Pak
$$\int_{\varphi_{\rho_2}} f - \int_{\varphi_{\rho_1}} f = \int_{\varphi_1 \dot+ [-\rho_2,-\rho_1] \dot+ (\dot-\varphi_3) \dot+ [\rho_1,\rho_2]} f \; + \int_{\varphi_2 \dot+ [\rho_2,\rho_1] \dot+ (\dot-\varphi_4) \dot+ [-\rho_1,-\rho_2]} f = 0,$$

protože $U(a,R) \setminus$ úsečka $[a, a+Ri)$ jsou hvězdovité množiny

a $U(a,R) \setminus$ úsečka $[a, a-Ri)$ a dle V III.13

(2) f má v a odstranitelnou singularitu $\Rightarrow \operatorname{res}_a f = 0$

($U(a,R)$ je hvězdovitá, stačí použít Věta III.13)

f má v a pól násobnosti $p\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow \operatorname{res}_a f = a_{-1}$,

kde $a_{-1},\dots, a_{-p}$ jsou čísla z V2(2)

Γ $f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-a)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-a)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + g(z)$, kde g je holomorfní na $U(a,R)$

Pak $\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_S} f = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_S} \frac{a_{-p}}{(z-a)^p}\,dz + \dots + \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_S} \frac{a_{-2}}{(z-a)^2}\,dz}_{} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_S} \frac{a_{-1}}{z-a}\,dz + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_S} g}_{=0} =$

$= 0$ dle lemmatu III.3, neboť $\frac{1}{(z-a)^k}$ pro $k>1$ má na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ primit. fci $\frac{-1}{(k-1)(z-a)^{k-1}}$ dle V III.13

$= a_{-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_S} \frac{1}{z-a}\,dz}_{=1} = a_{-1}$

$=1$, je to $\text{ind}_{\varphi_S} a$, lze též spočíst dosazením do definice. $\lrcorner$

<u>Věta IV.3</u> $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, $M \subset \Omega$ konečná, $\varphi: [a,b] \to \Omega\setminus M$ uzavřená cesta.

Nechť $\forall g: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfní platí $\int_\varphi g = 0$

(*) „pro Ω a φ platí Cauchyova věta")

Pak pro každou f holomorfní na $\Omega\setminus M$, která má v každém bodě M buď odstranitelnou singularitu nebo pól, platí

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{a\in M} \text{res}_a f \cdot \text{ind}_\varphi a$$

Dk: $a \in M$. Má-li f v bodě a odstranitelnou singularitu, položíme $H_a \equiv 0$

Pokud f má v bodě a pól násobnosti $p_a \in \mathbb{N}$, pak dle V2(2) existují

$$c^a_{-1}, \dots, c^a_{-p_a} \in \mathbb{C}, \text{ že funkce}$$

$$f(z) - \frac{c^a_{-1}}{z-a} - \dots - \frac{c^a_{-p_a}}{(z-a)^{p_a}} \quad \text{má v bodě } a \text{ odstr. singularitu.}$$

Označíme $H_a(z) = \dfrac{c^a_{-1}}{z-a} + \dots + \dfrac{c^a_{-p_a}}{(z-a)^{p}}$

Pak platí: H_a je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$\sum_{a \in M} H_a$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus M$

$f - \sum_{a \in M} H_a$ je holomorfní na $\Omega \setminus M$ a v každém bodě M má odstranitelnou singularitu. Dodefinujeme-li v bodech M limitami, dostaneme funkci holomorfní na Ω.

Dle předpokladu tedy $\int_\varphi (f - \sum_{a \in M} H_a) = 0$,

neboli $\int_\varphi f = \sum_{a \in M} \int_\varphi H_a$

Je-li $a \in M$ pól násobnosti p_a, pak

$$\int_\varphi H_a = \int_\varphi \left(\frac{c^a_{-1}}{z-a} + \frac{c^a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c^a_{-p_a}}{(z-p_a)^{p_a}} \right) dz =$$

$$= \underbrace{c^a_{-1}}_{= \operatorname{res}_a f} \underbrace{\int_\varphi \frac{1}{z-a} dz}_{= 2\pi i \cdot \operatorname{ind}_\varphi a} + \underbrace{c^a_{-2} \int_\varphi \frac{1}{(z-a)^2} dz + \dots + c^a_{-p_a} \int_\varphi \frac{1}{(z-a)^{p_a}} dz}_{= 0 \text{ dle V III.3}}$$

$\frac{1}{(z-a)^k}$ má ($k \geq 2$) prim. funkci na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

Pokud je a ~~izol~~ odstranitelná singularita,

pak $\int_\varphi H_a = 0$ (VIII.13) & $\operatorname{res}_a f = 0$

Tedy vždy

$$\int_\varphi f = 2\pi i \cdot \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_\varphi a.$$