Dôkaz Vety IV.4

f, g holomorfné na prstencovom okolí bodu $a \in \mathbb{C}$

(1.) f má v bode $\underline{a}$ pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \left(f(z) \cdot (z-a)^p \right)^{(p-1)}$$

Γ f má v bode $\underline{a}$ pól násob. $p \Rightarrow$ funkcia $g(z) = (z-a)^p f(z)$ má v bode $\underline{a}$ odstrániteľnú singularitu, po dodefinovaní je teda holomorfná.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{na okolí } a$$

pak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}$ na prstencovom okolí bodu $\underline{a}$

Teda $\operatorname{res}_a f = c_{p-1} = \frac{1}{(p-1)!} g^{(p-1)}(a) =$ výraz vo znení. $\lrcorner$

$\uparrow$

VIII.16

(2) f, g holomorfné v bode a, g má v bode a ~~pól~~ koreň násobnosti 1 $\Rightarrow$ $\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$

Γ g má koreň nás. 1

$\Rightarrow g(z) = (z-a) h(z)$, h holomorfná v bode a

$h(a) \neq 0$

Pritom $h(a) = g'(a)$ $\left(g'(z) = h(z) + (z-a) \cdot h'(z) \right)$

Pak $\lim_{z \to a} (z-a) \cdot \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f(z)}{h(z)} = \frac{f(a)}{h(a)} = \frac{f(a)}{g'(a)}$

Pokiaľ $f(a) \neq 0$, pak $\frac{f}{g}$ má v a pól násobnosti 1, a teda rezíduum sa počíta týmto vzorcom dľa (1)

Pokud $f(a)=0$, pak $\frac{f}{g}$ má v $\underline{a}$ odstranitelnou singularitu

⌈ buď $f\equiv 0$ nebo f má v a kořen násobnosti $p\geq 1$.
V obou případech vyjde, že $\frac{f}{g}$ má v bodě a vlastní limitu ⌋⌋

a tedy $\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = 0 = \frac{f(a)}{g'(a)}$ ⌋

(3) f holomorfní v $\underline{a}$ a g má v $\underline{a}$ pól násobnosti 1

$$\Rightarrow \operatorname{res}_a (fg) = f(a)\cdot \operatorname{res}_a g.$$

⌈ g má v $\underline{a}$ pól násobnosti 1

$\Rightarrow \operatorname{res}_a g = \lim_{z\to a} (z-a)g(z)$ díky (1)

Tedy zjistíme $\lim_{z\to a} (z-a)f(z)g(z) = f(a)\cdot \operatorname{res}_a g$

A toto je $\operatorname{res}_a (fg)$ ⌈ z důvodu stejně jako v (2) – rozlišit $f(a)\neq 0$ a $f(a)=0$ ⌋⌋ ⌋

(4) f holomorfní v bodě $\underline{a}$, g má v bodě $\underline{a}$ pól násobnosti p

$$\Rightarrow \operatorname{res}_a (fg) = \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} b_{-k},$$

kde $b_{-1},\dots,b_{-p}$ jsou koeficienty z $VZ(2)$

$$g(z) = \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{-j}}{(z-a)^j} + h(z), \quad h \text{ holomorfní v } a$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{p-1} c_n (z-a)^n + (z-a)^p \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}}_{v(z)}$$

v holomorfní v a

$$f(z)\cdot g(z) = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{b_{-j}}{(z-a)^j} + h(z)\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{p-1} c_n (z-a)^n + (z-a)^p \cdot v(z)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{n=0}^{p-1} b_{-j} c_n (z-a)^{n-j} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} b_{-j}(z-a)^{p-j} v(z) + h(z)\cdot f(z)}_{\text{holomorfní v bodě } a}$$

$m := n-j$

$\Rightarrow \quad -p \le m \le p-2$

$n = m+j$

$1 \le j \le p \quad \& \quad 0 \le m+j \le p-1$

$-m \le j \le p-1-m$

$\Rightarrow \quad \max\{1,-m\} \le j \le \min\{p-1-m, p\}$

$$= \sum_{m=-p}^{p-2} \left((z-a)^m \cdot \sum_{j=\max\{1,-m\}}^{\min\{p, p-1-m\}} b_{-j} c_{m+j} \right)$$

Reziduum je koeficient u $(z-a)^{-1}$,

tedy $\sum_{j=1}^{p} b_{-j} c_{j-1}$, přičemž $c_{j-1} = \dfrac{f^{(j-1)}(a)}{(j-1)!}$

dle VIII. 16.