IV.2 Izolované singularity holomorfních funkcí, rezidua

Definice. Nechť $a \in \overline{\mathbb{C}}$ a $r > 0$. **Prstencovým okolím bodu a o poloměru r** rozumíme množinu $P(a,r) = U(a,r) \setminus \{a\}$.

Věta 2 (Casorati-Weierstrassova). *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a funkce f je holomorfní na $P(a,r)$. Pak nastává právě jedna z následujících možností:*

(1) *Existuje takové $\rho \in (0,r)$, že f je omezená na $P(a,\rho)$. Pak existuje vlastní $\lim_{z\to a} f(z)$. Dodefinujeme-li funkci f v bodě a hodnotou této limity, dostaneme funkci holomorfní na $U(a,r)$. (Pak říkáme, že f má v bodě a* **odstranitelnou singularitu***.)*

(2) *$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. Pak existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$, pro které existuje vlastní nenulová $\lim_{z\to a}(z-a)^p f(z)$. Navíc existují jednoznačně určená čísla $a_{-p}, a_{-(p-1)}, \ldots, a_{-1} \in \mathbb{C}$, $a_{-p} \neq 0$, že funkce*

$$z \mapsto f(z) - \frac{a_{-1}}{z-a} - \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} - \ldots - \frac{a_{-p}}{(z-a)^p}$$

má v bodě a odstranitelnou singularitu. (V tomto případě říkáme, že f má v bodě a **pól násobnosti p***.)*

(3) *$\lim_{z\to a} f(z)$ neexistuje. Pak pro každé $\rho \in (0,r)$ je $f(P(a,\rho))$ hustá v $\mathbb{C}$. (Říkáme, že f má v bodě a* **podstatnou singularitu***.)*

Poznámka. *Platí dokonce* **Velká Picardova věta***: Má-li f v bodě z_0 podstatnou singularitu, pak v každém prstencovém okolí z_0 nabývá f všech hodnot z $\mathbb{C}$ s výjimkou nejvýše jedné.*

Definice. Nechť f je funkce definovaná na $U(\infty,r)$ pro nějaké $r > 0$. Řekneme, že

(i) f je **holomorfní v bodě ∞**,

(ii) f **má v bodě ∞ kořen násobnosti p**,

pokud příslušnou vlastnost má funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ v bodě 0. Je-li f holomorfní na $P(\infty,r)$ pro nějaké $r > 0$, pak říkáme, že f **má v bodě ∞ odstranitelnou singularitu** (**pól násobnosti p**, **podstatnou singularitu**), jestliže příslušný typ singularity má funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ v bodě 0.

Definice. Nechť f je holomorfní funkce v $P(a,R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Pak **reziduem funkce f v bodě a** rozumíme číslo

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} f,$$

kde $\rho \in (0,R)$ a φ_ρ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru ρ.

Poznámky.

(1) Definice rezidua je korektní, protože hodnota uvedeného integrálu nezávisí na $\rho \in (0, R)$. To plyne snadno z Věty III.13, protože otevřený kruh, z něhož je vynechán jeden poloměr, je hvězdovitá množina.

(2) Pokud f má v bodě a odstranitelnou singularitu, je $\operatorname{res}_a f = 0$; pokud f má v bodě a pól, je $\operatorname{res}_a f = a_{-1}$, kde a_{-1} je hodnota z Věty 2(ii).

Věta 3 (reziduová věta – první verze). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $M \subset \Omega$ konečná množina a $\varphi : [a, b] \to \Omega \setminus M$ je uzavřená cesta. Předpokládejme, že pro Ω a φ platí Cauchyova věta, tj. $\int_\varphi g = 0$ pro každou funkci g holomorfní na Ω. Pak pro každou f holomorfní na $\Omega \setminus M$ takovou, že v každém bodě M má buď odstranitelnou singularitu nebo pól, platí*

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_\varphi a.$$

Poznámky.

(1) Ve Větě 3 stačí předpokládat, že f je holomorfní na $\Omega \setminus M$. Toto silnější tvrzení používá výsledky oddílu IV.4 (viz Věta 13), nicméně ke konkrétním výpočtům se příliš nepoužívá.

(2) Funkce, které jsou holomorfní až na izolovanou množinu pólů, se nazývají **meromorfní**. Podrobněji se jimi zabývá přednáška Komplexní analýza 1.

Věta 4 (některé metody výpočtu reziduí). *Nechť f a g jsou holomorfní funkce v nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$.*

(1) *Má-li funkce f v bodě a pól násobnosti p, pak*

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} (f(z)(z-a)^p)^{(p-1)}.$$

(2) *Jsou-li f, g holomorfní v bodě a a g má v bodě a kořen násobnosti 1 (tj. $g(a) = 0$ a $g'(a) \neq 0$), pak $\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$.*

(3) *Je-li f holomorfní v a a g má v a pól násobnosti 1, pak $\operatorname{res}_a(fg) = f(a) \cdot \operatorname{res}_a g$.*

(4) *Je-li f holomorfní v bodě a a g má v bodě a pól násobnosti p, pak*

$$\operatorname{res}_a(fg) = \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} b_{-k},$$

kde $b_{-1}, \dots, b_{-p}$ jsou koeficienty z Věty 2(2).