II. Křivky, křivkový integrál, Cauchyova věta a Cauchyův vzorec

1. Načrtněte obrazy následujících křivek a spočtěte jejich délku:
a) $\varphi(t) = t + it^2$, $t \in [0, 10]$; b) $\varphi(t) = i\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$; c) $\varphi(t) = 1 + i\cos^2 t$, $t \in [0, 2\pi]$;
d) $\varphi(t) = 2\sin t - i\cos t$, $t \in [0, 4\pi]$; e) $\varphi(t) = t(\cos t + i\sin t)$, $t \in [0, 10\pi]$.

2. Pomocí definice křivkového integrálu spočtěte $\int_\varphi f$, kde:
a) $f(z) = \operatorname{Re} z$, φ je orientovaná úsečka $[0, 1+i]$;
b) $f(z) = \operatorname{Im} z$, φ je kladně orientovaná polokružnice $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$;
c) $f(z) = |z|$, φ je orientovaná úsečka $[0, 2-i]$;
d) $f(z) = |z|$, φ je kladně orientovaná polokružnice $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$;
e) $f(z) = \frac{z}{\bar z}$, φ je kladně orientovaný obvod horního polomezikruží mezi kružnicemi $|z| = 1$ a $|z| = 2$;
f) $f(z) = \frac{z}{|z|}$, φ je jako v e).

3. Najděte přírůstek logaritmu f podél φ, jestliže
a) $f(z) = z$, φ je orientovaná úsečka $[u, v]$, kde $u, v \in \mathbb{C}$; b) $f(z) = z$, $\varphi(t) = \exp 2\pi i t$, $t \in [0, 2]$; c) $f(z) = z - 2$, φ jako v b); d) $f(z) = \frac{1}{z}$, φ jako v b).

4. Načrtněte obraz křivky φ a určete hodnoty indexu vzhledem k φ v komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$, pokud:
(a) φ je křivka z příkladu 2e); (b) $\varphi(t) = \sin^2 t \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;
(c) $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$, kde $\varphi_1(t) = \sin^2 t \cdot e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ a $\varphi_2(t) = \sin^2 t \cdot e^{-it}$, $t \in [0, \pi]$;
(d) $\varphi = \psi \dotplus [6\pi, -6\pi] \dotplus [-6\pi, -6\pi + 6\pi i] \dotplus [-6\pi + 6\pi i, 6\pi i] \dotplus [6\pi i, \frac{\pi}{2} i]$, kde $\psi(t) = te^{it}$, $t \in [\frac{\pi}{2}, 6\pi]$.

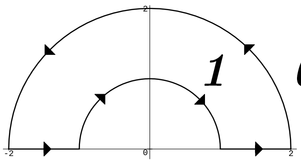
5. S využitím Cauchyovy věty, znalosti primitivních funkcí a definice spočtěte $\int_\varphi f$, pokud:
(a) $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu (a1) -1, (a2) 0, (a3) 1, (a4) 2;
(b) $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu (b1) -1, (b2) 0, (b3) 1, (b4) 2;
(c) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^3}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu (c1) -1, (c2) $\frac{1}{2}$, (c3) 2;
(d) $f(z) = \frac{z}{z^4-1}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru r a středu r $(r > 0)$.

6. Pomocí Cauchyova vzorce spočtěte integrály $\int_\varphi f$, kde
a) $f(z) = \frac{\sin(z+i)}{z^2+1}$, φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 2;
b) $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$, φ jako v a), c) $f(z) = \frac{e^z - e}{z^2-1}$, φ jako v a), d) $f(z) = \frac{ze^z}{(z+1)^3}$, φ jako v a), e) $f(z) = \frac{e^z}{e^z-1}$, φ jako v a).
f) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}$, φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru r, kde $|a| < r < |b|$, $n \in \mathbb{Z}$,

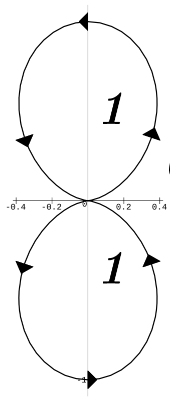
7. S využitím Cauchyovy věty spočtěte Newtonovy integrály
(a) $\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ (NÁVOD: Integrujte funkci $\exp(iz^2)$ přes obvod kruhové výseče o středu 0, přičemž oblouk kružnice je ohraničen body R a $R\frac{1+i}{\sqrt2}$; dokažte, že limita integrálu přes uvedený oblouk pro $R \to \infty$ je 0 a využijte znalost integrálu $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.)
(b) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{\exp(iz)}{z}$ přes křivku $[r, R] \dotplus \varphi_R \dotplus [-R, -r] \dotplus \psi_r$, kde $R > r > 0$, φ_R je kladně orientovaná horní polokružnice o středu 0 a poloměru R a ψ_r je záporně orientovaná horní polokružnice o středu 0 a poloměru r; dokažte, že limita integrálu přes φ_R pro $R \to \infty$ je 0; spočtěte limitu integrálu přes ψ_r pro $r \to 0+$ pomocí Lebesgueovy věty a uvažte imaginární část.)
(c) $\int_0^\infty x^{s-1}\sin x\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^\infty x^{s-1}\cos x\,\mathrm{d}x$ pro $s \in (0,1)$ (NÁVOD: Integrujte funkci $m_{s-1}(z)\exp(iz)$ přes křivku $[r, R] \dotplus \varphi_R \dotplus [iR, ir] \dotplus \psi_r$, kde $R > r > 0$, φ_R je oblouk kružnice o středu 0 a poloměru R od R do iR a ψ_r je oblouk kružnice o středu 0 a poloměru r od ir do r; spočtěte limity jako v (b); výsledek vyjádřete pomocí $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)\,\mathrm{d}x$.)

Výsledky a návody. **1.** a) Část paraboly $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$, $\operatorname{Re} z \in [0, 10]$, délka je $\int_0^{10} \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t = 5\sqrt{401} - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{401} - 20)$ (substituce $t = \frac{1}{2}\sinh t$); b) úsečka spojující i a $-i$ (křivka ji projde tam a zpět), délka je 4; c) úsečka spojující $1+i$ a 1 (křivka ji projde dvakrát tam a zpět), délka je 4; d) elipsa o středu v 0 a poloosami 2 ve směru reálné osy a 1 ve směru imaginární osy (křivka ji proběhne dvakrát v kladném smyslu, počínaje v bodě $-i$), délka je $\int_0^{4\pi} \sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$; e) délka je $\int_0^{10} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 5\sqrt{101} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{101} - 10)$ (substituce $t = \sinh t$), jde o část spirály (Archimédovy). **2.** a) $\frac{1+i}{2}$, b) $-\frac{\pi}{2}$, c) $\frac{\sqrt5}{2}(2-i)$, d) $2i$, e) $\frac{4}{3}$, f) -2. **3.** a) Pokud bod 0 leží na úsečce, pak nemá smysl; pokud úsečka má prázdný průnik s polopřímkou $(-\infty, 0]$, pak $\log(v) - \log(u)$; pokud jeden krajní bod leží na $(-\infty, 0)$ a druhý má nezápornou imaginární část, pak $\log(v) - \log(u)$. Pokud má úsečka společný bod s $(-\infty, 0)$, pak v případě, že $\operatorname{Im} v < 0$ je přírůstek $\log(v) - \log(u) + 2\pi i$ a v případě, že $\operatorname{Im} u < 0$, pak $\log(v) - \log(u) - 2\pi i$. b) $4\pi i$; c) 0; d) $-4\pi i$.

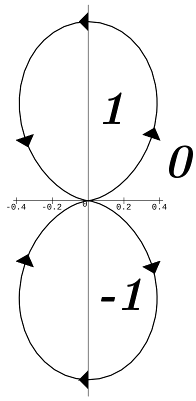
4. a)



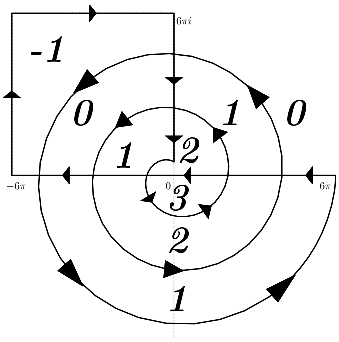
b)



c)



d)



5. a): (a1) πi, (a2) $-2\pi i$, (a3) πi, (a4) 0 (pro (a4) použijte Cauchyovu větu přímo, pro ostatní případy rozložte na parciální zlomky, ty integrujte zvlášť, na některé lze použít Cauchyova věta, zbylé integrály lze spočítat snadno z definice); b): (b1) $-\pi i$, (b2) 0, (b3) πi, (b4) 0 (pro (b4) použijte Cauchyovu větu přímo, pro ostatní případy rozložte na parciální zlomky, případy (b1) a (b3) počítejte analogicky jako v a), pro případ (b2) navíc lze použít, že funkce $\frac{1}{z^2}$ má primitivní funkci); c): (c1) $2\pi i$, (c2) 0, (c3) $-2\pi i$ (rozložte na parciální zlomky, navíc použijte fakt (dokažte si ho z Cauchyovy věty), že pokud $|b-a| < r$, tj. $b \in U(a,r)$, pak integrál z $\frac{1}{z-b}$ podél kladně orientované kružnice o středu a a poloměru r je roven integrálu z $\frac{1}{z-b}$ přes kladně orientovanou kružnici o středu b, přičemž poslední integrál lze snadno spočítat z definice a nezávisí na poloměru kružnice); d) pro $r < \frac{1}{2}$ vyjde 0 (z Cauchyovy věty), pro $r = \frac{1}{2}$ nemá smysl, pro $r > \frac{1}{2}$ vyjde $\frac{1}{2}\pi i$ (použijte fakt zmíněný v c) k důkazu, že pro $r > \frac{1}{2}$ je výsledek stejný jako pro $r = 1$). **6.** a)$2\pi i \cdot \frac{\sin(2i)}{2i} = -i\pi \sinh 2$ (rozložte $\frac{1}{z^2+1}$ na parciální zlomky a rozdělte na dva integrály); b) $\pi i(e - \frac{1}{e})$ (rozložte $\frac{1}{z^2-1}$ na parciální zlomky a rozdělte na dva integrály); c) $\pi i(e - \frac{1}{e})$ (rozložte $\frac{1}{z^2-1}$ na parciální zlomky a rozdělte na dva integrály); d) $\frac{\pi i}{e}$ (použijte Cauchyův vzorec pro druhou derivaci); e) $2\pi i$ (rozšiřte z a použijte fakt, že funkce $\frac{z}{e^z-1}$ je po dodefinování holomorfní v bodě 1); f) $-\frac{2\pi i}{(b-a)^n}$ (použijte Cauchyův vzorec pro vyšší derivace). **7.** a) $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ (oba), b) $\frac{\pi}{2}$, c) $\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}$, $\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}$. **8.** a) $\frac{\pi^2}{6}$ pro $a = 0$, $\frac{\pi}{2a\sqrt{2}} \cdot \frac{\sinh \pi a\sqrt{2} - \sin \pi a\sqrt{2}}{\cosh \pi a\sqrt{2} - \cos \pi a\sqrt{2}}$ jinak; b) $\frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$, c) $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$, d) $\frac{\pi^2}{6}$, e) $-\frac{\pi^2}{12}$, f) $\frac{2\pi}{3} \operatorname{tgh} \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, g) $\frac{1}{2a^2}(1 + \frac{\pi a}{\sin \pi a})$, h) $-\pi \operatorname{cotg} \pi c$, i) $-\frac{\pi}{\sin \pi c}$. **9.** a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{\pi}{2}$, c) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\frac{b^2}{4a})$, d) $\frac{\pi/p}{\sin(\pi/p)}$, e) π, f) $\pi(b-a)$, g) $\frac{\pi}{8}$.