```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% POJMY, JEJICHŽ ZNALOST SE OČEKÁVÁ
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

množina komplexních čísel
algebraický zápis komplexního čísla
maticový zápis komplexního čísla
reálná část komplexního čísla
imaginární část komplexního čísla
absolutní hodnota komplexního čísla
komplexně sdružené číslo
metrika na $\mathbb{C}$
okolí bodu v $\mathbb{C}$
otevřená množina v $\mathbb{C}$
uzavřená množina v $\mathbb{C}$
konvergence posloupnosti v $\mathbb{C}$
spojitost funkce komplexní proměnné
limita funkce komplexní proměnné
komplexní funkce reálné proměnné
derivace komplexní funkce reálné proměnné
primitivní funkce ke komplexní funkci reálné proměnné
integrál z komplexní funkce reálné proměnné (Newtonův, Riemannův, Lebesgueův)
komplexní funkce komplexní proměnné
derivace podle komplexní proměnné
funkce holomorfní na množině
celá funkce
mocninná řada o středu a
poloměr konvergence mocninné řady
kruh konvergence mocninné řady
exponenciální funkce
funkce sinus
funkce kosinus
funkce hyperbolický sinus
funkce hyperbolický kosinus
hlavní hodnota argumentu
hlavní hodnota logaritmu
množina $\mathrm{Log}(z)$
množina $\mathrm{Arg}(z)$
obecná mocnina $M_a(z)$
hlavní hodnota obecné mocniny
křivka v $\mathbb{C}$
obraz křivky
uzavřená křivka
opačná křivka
spojení dvou křivek
délka křivky
kladně orientovaná kružnice
orientovaná úsečka
cesta (po částech hladká křivka)
integrál podél cesty
primitivní funkce ke komplexní funkci komplexní proměnné
souvislá množina
oblast
přírůstek logaritmu funkce podél křivky
index bodu ke křivce
komponenta množiny
trojúhelník
obvod trojúhelníka
hvězdovitá množina

p-násobný kořen holomorfní funkce
hromadný bod množiny
izolovaná množina
množina $\overline{\mathbb{C}}$
okolí bodu ∞
limita a spojitost v $\overline{\mathbb{C}}$
stereografická projekce
metrika na $\overline{\mathbb{C}}$
prstencové okolí
odstranitelná singularita (i v ∞)
pól násobnosti p (i v ∞)
podstatná singularita (i v ∞)
funkce holomorfní v ∞
kořen násobnosti p v ∞
reziduum funkce v bodě
Laurentova řada o středu a
regulární část Laurentovy řady
hlavní část Laurentovy řady
konvergence hlavní části Laurentovy řady
součet hlavní části Laurentovy řady
konvergence Laurentovy řady
součet Laurentovy řady
mezikruží o středu a
mezikruží konvergence Laurentovy řady
řetězec
cykl
obraz řetězce
délka řetězce
integrál spojité funkce podél řetězce
přírůstek logaritmu funkce podél řetězce
index bodu vzhledem k cyklu
ekvivalentní řetězce
nabývání hodnoty p-násobně

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% VĚTY, JEJICHŽ ZNALOST SE OČEKÁVÁ %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Vysvětlivky:
%  číslo na konci řádku - číslo věty podle přednášky
%  značka před číslem:
%
%  bez značky   věta se bude zkoušet i s důkazem
%          *    věta se nebude explicitně zkoušet, nicméně
%               se předpokládá její znalost včetně základní
%               myšlenky důkazu, pokud byla dokázána
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

limita a spojitost komplexní funkce reálné proměnné % * I.1
odhad absolutní hodnoty integrálu z komplexní funkce % I.2
Cauchy-Riemannovy podmínky % I.3
konvergence mocninných řad % * II.1
derivování a integrování mocninných řad % * II.2
vlastnosti exponenciální funkce % II.3
vlastnosti goniometrických a hyperbolických funkcí % * II.4
vlastnosti logaritmu a argumentu % II.5
vlastnosti obecné mocniny % * II.6
vlastnosti křivkového integrálu % * III.1
derivace křivkového integrálu podle meze % III.2 (včetně důkazu III.1(4)
výpočet křivkového integrálu pomocí primitivní funkce % III.3
charakterizace oblasti % III.4
existence primitivní funkce a křivkový integrál % III.5
záměna křivkového integrálu a limity, spojitost a derivace dle parametru % * III.6 a III.7
existence spojité větve logaritmu podél křivky % * III.8
existence spojité větve logaritmu holomorfní funkce podél cesty % III.8 (dokázaná část)
přírůstek logaritmu a index bodu vzhledem ke křivce % * III.9 a následující poznámka
komponenty otevřené množiny % III.10
vlastnosti indexu bodu ke křivce % III.11
propichovací věta % * poznámka(3) za III.11
Cauchy-Goursatova věta pro trojúhelník % III.12
Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu % III.13
Cauchyův vzorec pro kruh % III.14
vlastnost průměru pro holomorfní funkce % * Důsledek III.14
Cauchyův vzorec pro vyšší derivace % III.15
vyjádření holomorfní funkce mocninnou řadou % III.16
Cauchyovy odhady koeficientů mocninné řady % III.17
Liouvilleova věta % III.18
základní věta algebry % III.19
rozklad polynomu na kořenové činitele % * Důsledek III.19
násobnost kořenů holomorfních funkcí % III.20
věta o jednoznačnosti % III.21
princip maxima modulu % III.22
Weierstrassova věta o limitě posloupnosti holomorfních funkcí % III.23
Morerova věta % III.24
vlastnosti stereografické projekce % * IV.1
Casorati-Weierstrassova věta % IV.2
Velká Picardova věta % * Poznámka za IV.2
reziduová věta (první verze) % IV.3
metody výpočtu reziduí % * IV.4
Jordanovo lemma % IV.6 (pouze tato verze, IV.5 zkoušeno nebude)
Lemma IV.7 % * IV.7
konvergence Laurentovy řady % IV.8
Cauchyův vzorec pro mezikruží % IV.10 (včetně důkazu IV.9)
Laurentův rozvoj holomorfní funkce % IV.11
Laurentův rozvoj a izolované singularity % IV.12

reziduová věta (druhá verze) % * IV.13
o cyklu okolo kompaktu % V.1
globální Cauchyova věta % V.2
obecná reziduová věta % V.3
princip argumentu % V.4
Rouchéova věta pro cykl % V.6 včetně V.5
Rouchéova věta pro kompakt % * V.7
o počtu řešení rovnice $f(z) = b$ % * V.8
o otevřeném zobrazení % * V.9
o lokální existenci inverzní funkce % * V.10
o prosté holomorfní funkci % * V.11

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% DALŠÍ OTÁZKY %%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

1] Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, f nekonstantní holomorfní funkce na Ω. Nechť funkce $|f|$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální minimum. Dokažte, že $f(a) = 0$.

2] Dokažte, že funkce sinus je prostá na množině $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$, určete obraz množiny $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ a ukažte, že inverzní funkce k sinu zúženému na $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ je holomorfní.

3] Dokažte, že funkce sinus je prostá na $U(\frac{\pi}{4}, r)$ pro nějaké $r > 0$ a že inverzní funkce je holomorfní. Čemu se rovná derivace této inverzní funkce?

4] Ukažte, že neexistuje holomorfní funkce g na množině $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, která splňuje $g(z)^2 = z$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5] Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Popište geometrický tvar množiny $M_a(z)$ v závislosti na $a \in \mathbb{R}$. Kdy tato množina obsahuje reálné číslo?

6] Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Popište geometrický tvar množiny $M_{ia}(z)$ v závislosti na $a \in \mathbb{R}$. Kdy tato množina obsahuje reálné číslo?

7] Nechť f, g jsou dvě celé funkce, pro které platí $|f(z)| \leq |g(z)|$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Dokažte, že funkce f je násobkem funkce g.

8] Nechť φ a ψ jsou dvě cesty v $\mathbb{C}$. Nechť $f : \langle\varphi\rangle \times \langle\psi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Ukažte, že

$$\int_\varphi \left(\int_\psi f(w,z)dw \right) dz = \int_\psi \left(\int_\varphi f(w,z)dz \right) dw.$$

9] Nechť f, g jsou funkce holomorfní v nějakém okolí bodu a, pro které platí $f(a) = g(a) = 0$ a funkce g není konstantní na okolí bodu a. Dokažte, že $\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

10] Nechť funkce f, g jsou holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu a a v bodě a mají obě pól. Dokažte, že $\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

11] Nechť $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ je konečná množina, f je holomorfní na $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ a v každém bodě množiny M má pól. Dokažte, že f je racionální funkce. Vyjádřete stupeň čitatele a stupeň jmenovatele (s využitím násobností jednotlivých pólů).

12] Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{C}$ podstatnou singularitu. Dokažte, že existuje $c \in \mathbb{C}$ takové, že funkce $\frac{1}{f-c}$ nemá v bodě a izolovanou singularitu.

13] Nechť funkce f, g jsou holomorfní v prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$. Jaký typ izolované singularity má v bodě a funkce $f + g$? Proveďte analýzu v závislosti na typech izolovaných singularit funkcí f a g. Obecně platná tvrzení dokažte, případné varianty ilustrujte na příkladech.

14] Nechť funkce f, g jsou holomorfní v prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$. Jaký typ izolované singularity má v bodě a funkce $f \cdot g$? Proveďte analýzu v závislosti na typech izolovaných singularit funkcí f a g. Obecně platná tvrzení dokažte, případné varianty ilustrujte na příkladech.

15] Dokažte, že funkce tangens je prostá na $U(0, r)$ pro nějaké $r > 0$ a že inverzní funkce je holomorfní. Čemu se rovná derivace této inverzní funkce?

16] Nechť f je racionální funkce. Ukažte, že f je součtem nějakého polynomu a nějaké lineární kombinace funkcí tvaru $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^k}$ (kde $k \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{C}$).

17] Nechť f a g jsou dvě funkce holomorfní na $P(a, r)$ pro nějaké $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Předpokládejme, že $|f(z)| \leq |g(z)|$ pro $z \in P(a, r)$. (i) Nechť g má v a pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$. Jaký typ izolované singularity může mít v bodě a funkce f? (ii) Nechť f má v a pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$. Jaký typ izolované singularity může mít v bodě a funkce g? (Obecně platná tvrzení dokažte, případné varianty ilustrujte na příkladech.)

18] Nechť f je racionální funkce a $z_1, \ldots, z_n$ všechny její póly v $\mathbb{C}$. Ukažte, že $\sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z_j} f = a_{-1}$, kde a_{-1} je koeficient u z^{-1} v Laurentově rozvoji funkce f v prstencovém okolí ∞.