ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2017/2018

PŘÍKLADY KE KAPITOLÁM I A II

Derivace podle komplexní proměnné, Cauchy-Riemannovy podmínky

Příklad 1. Ukažte, že funkce $f(z) = \overline{z}$ nemá derivaci podle komplexní proměnné v žádném bodě; a to jednak pomocí Cauchy-Riemannových podmínek a jednak přímo z definice derivace.

Příklad 2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast (tj. otevřená souvislá množina) a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkce splňující $f'(z) = 0$ pro každé $z \in \Omega$. Ukažte, že f je konstantní na Ω.

`Návod:` *Pomocí věty o střední hodnotě ukažte, že f je konstantní na každé úsečce obsažené v Ω. Dále zvolme $z_0 \in \Omega$. Ukažte, že množina $\{z \in \Omega; f(z) = f(z_0)\}$ je relativně uzavřená i relativně otevřená v Ω.*

Příklad 3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $n \in \mathbb{N}$ a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkce splňující $f^{(n)}(z) = 0$ pro každé $z \in \Omega$ ($f^{(n)}$ je n-tá derivace f podle komplexní proměnné). Ukažte, že f je polynom stupně nejvýše $n - 1$.

`Návod:` *Použijte Příklad 2 a matematickou indukci.*

Příklad 4. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je funkce holomorfní na Ω. Ukažte, že f je konstantní, pokud je splněna jedna z následujících podmínek:

(1) f nabývá na Ω jen reálných hodnot.
(2) Funkce $\overline{f}$ je rovněž holomorfní na Ω.
(3) Existují čísla $a, b \in \mathbb{R}$, ne obě nulová, pro která je funkce $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f$ konstantní na Ω.
(4) Existují čísla $a, b \in \mathbb{C}$, ne obě nulová, pro která je funkce $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f$ konstantní na Ω.

`Návod:` *(1) Použijte Cauchy-Riemannovy podmínky a Příklad 2. (2) Buď lze použít Cauchy-Riemannovy podmínky na obě funkce f a $\overline{f}$ a následně Příklad 2; nebo lze aplikovat bod (1) na funkce $f + \overline{f}$ a $i(f - \overline{f})$. (3) Nalezněte $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, pro která funkce $\alpha f + \beta$ splňuje předpoklady bodu (1). Jiná možnost je použít Cauchy Riemannovy podmínky, s použitím řešení vhodné soustavy lineárních rovnic dokázat, že $f' = 0$ na Ω, a následně použít Příklad 2. (4) Ukažte, že lze bod (3) aplikovat buď na dvojici $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b$ nebo na dvojici $\operatorname{Im} a, \operatorname{Im} b$.*

Příklad 5. Nechť $z, w \in \mathbb{C}$.

(1) Ukažte, že $\sin z = \sin w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi$ nebo $w + z = (2k+1)\pi$.
(2) Ukažte, že $\cos z = \cos w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi$ nebo $w + z = 2k\pi$.
(3) Ukažte, že $\sinh z = \sinh w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi i$ nebo $w + z = (2k+1)\pi i$.
(4) Ukažte, že $\cosh z = \cosh w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi i$ nebo $w + z = 2k\pi i$.

`Návod:` *(1,2) Použijte definici funkcí* sin *a* cos, *řešení kvadratické rovnice a skutečnost, že* $\exp z = \exp w$, *právě když* $w - z$ *je celočíselný násobek* $2\pi i$. *(3,4) Použijte (1,2) a skutečnost, že* $\sinh z = -i \sin iz$ *a* $\cosh z = \cos iz$ *pro* $z \in \mathbb{C}$.

Příklad 6. Nechť $w \in \mathbb{C}$.

(1) Ukažte, že rovnice $\sin z = w$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{C}$, a najděte všechna řešení.
(2) Ukažte, že rovnice $\cos z = w$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{C}$, a najděte všechna řešení.
(3) Pro které hodnoty $w \in \mathbb{C}$ mají uvedené rovnice řešení v $\mathbb{R}$? Jsou pak všechna řešení reálná?
(4) Pro které hodnoty $w \in \mathbb{C}$ mají uvedené rovnice ryze imaginární řešení?

`Návod:` *(1,2) Použijte definici funkcí* sin *a* cos *a řešení kvadratické rovnice. Řešení vyjádřete pomocí funkcí* $\mathrm{m}_{1/2}$ *a* log. *(3) Použijte znalosti o chování goniometrických funkcí na* $\mathbb{R}$ *a Příklad 5. (4) Použijte body (1,2).*

Příklad 7. Definujme funkci tg předpisem $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro která $\cos z \neq 0$.

(1) Určete definiční obor funkce tg a ukažte, že funkce tg je na svém definičním oboru holomorfní.
(2) Ukažte, že funkce tg nenabývá hodnot i a $-i$.
(3) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ má rovnice $\operatorname{tg} z = w$ nekonečně mnoho řešení a najděte je.
(4) Nechť $z, w \in \mathbb{C}$ patří do definičního oboru funkce tg. Ukažte, že $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} w$, právě když $z - w$ je celočíselný násobek π.

`Návod:` *(2,3) Použijte definici funkcí* sin *a* cos *a řešení kvadratické rovnice. Řešení vyjádřete pomocí funkce* log. *(4) Odvoďte z výsledku (3).*

Příklad 8. Definujme funkci cotg předpisem $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro která $\sin z \neq 0$.

(1) Určete definiční obor funkce cotg a ukažte, že funkce cotg je na svém definičním oboru holomorfní.
(2) Ukažte, že funkce cotg nenabývá hodnot i a $-i$.
(3) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ má rovnice $\operatorname{cotg} z = w$ nekonečně mnoho řešení a najděte je.
(4) Nechť $z, w \in \mathbb{C}$ patří do definičního oboru funkce cotg. Ukažte, že $\operatorname{cotg} z = \operatorname{cotg} w$, právě když $z - w$ je celočíselný násobek π.

`Návod:` *Použijte Příklad 7 a vztah funkcí* tg *a* cotg.

Příklad 9. Uvažme funkci $f(z) = \exp \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(1) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ má rovnice $f(z) = w$ nekonečně mnoho řešení a že tato řešení tvoří posloupnost s limitou 0.
(2) Ukažte, že pro každé $\delta > 0$ je $f(P(0, \delta)) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(3) Ukažte, že v každém prstencovém okolí nuly nabývá f všech komplexních nenulových hodnot nekonečněkrát.

Příklad 10. Uvažme funkce $f_1(z) = \sin \frac{1}{z}$ a $f_2(z) = \cos \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nechť $j \in \{1, 2\}$.

(1) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C}$ má rovnice $f_j(z) = w$ nekonečně mnoho řešení a že tato řešení tvoří posloupnost s limitou 0.
(2) Ukažte, že pro každé $\delta > 0$ je $f_j(P(0, \delta)) = \mathbb{C}$.
(3) Ukažte, že v každém prstencovém okolí nuly nabývá f_j všech komplexních hodnot nekonečněkrát.

Příklad 11. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $a \in \mathbb{C}$. Nechť $M_a(z)$ je množina hodnot a-té mocniny komplexního čísla z (viz oddíl II.3).

(1) Nechť $a \in \mathbb{Z}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ obsahuje právě jeden bod.
(2) Nechť $a \in \mathbb{Q}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ obsahuje konečně mnoho bodů.
(3) Nechť $a \in \mathbb{R}$. Ukažte, že každý prvek $w \in M_a(z)$ splňuje $|w| = |z|^a$.
(4) Nechť $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ je hustá podmnožina kružnice $\{w \in \mathbb{C}; |w| = |z|^a\}$.
(5) Nechť $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ je nekonečná a lze ji vyjádřit ve tvaru $M_a(z) = \{w_k; k \in \mathbb{Z}\}$, kde $w_k \to 0$ pro $k \to -\infty$ a $|w_k| \to +\infty$ pro $k \to +\infty$.

`Návod:` *Použijte definice, vlastnosti funkce* exp *a množiny* $\mathrm{Log}(z)$. *V bodě (4) navíc použijte známý fakt, že pro* $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *je množina* $\{\exp(i\pi n a); n \in \mathbb{Z}\}$ *hustá v jednotkové kružnici.*

Příklad 12. Nechť A je libovolná polopřímka s počátečním bodem 0. Ukažte, že existuje holomorfní funkce f na $\mathbb{C} \setminus A$, pro kterou platí $\exp(f(z)) = z$ pro $z \in A$.

`Návod:` *Existuje* $t \in (-\pi, \pi]$, *pro které* $A = \{re^{it}; r \in [0, +\infty)\}$.

Příklad 13. Nechť $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(1) Vyjádřete $\log(wz)$ pomocí $\log w$ a $\log z$. Kdy platí $\log(wz) = \log w + \log z$?
(2) Jaký je vztah mezi množinami $\mathrm{Log}(wz)$ a $\mathrm{Log}\, w + \mathrm{Log}\, z = \{a + b; a \in \mathrm{Log}\, w, b \in \mathrm{Log}\, z\}$?

Příklad 14. Nechť $w, z, a, b \in \mathbb{C}$, $z, w \neq 0$.

(1) Jaký je vztah mezi čísly $m_{a+b}(z)$ a $m_a(z) \cdot m_b(z)$? Kdy se rovnají?
(2) Jaký je vztah mezi množinami $M_{a+b}(z)$ a $M_a(z) \cdot M_b(z) = \{u \cdot v; u \in M_a(z), v \in M_b(z)\}$.
(3) Jaký je vztah mezi čísly $m_{ab}(z)$ a $m_a(m_b(z))$? Kdy se rovnají?
(4) Jaký je vztah mezi množinami $M_{ab}(z)$, $M_a(m_b(z))$, $m_a(M_b(z)) = \{m_a(u); u \in M_b(z)\}$ a $M_a(M_b(z)) = \bigcup_{u \in M_b(z)} M_a(u)$?
(5) Jaký je vztah mezi čísly $m_a(zw)$ a $m_a(z) \cdot m_a(w)$? Kdy se rovnají?
(6) Jaký je vztah mezi množinami $M_a(zw)$ a $M_a(z) \cdot M_a(w) = \{u \cdot v; u \in M_a(z), v \in M_a(w)\}$?