ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2017/2018

PŘÍKLADY KE KAPITOLE III

Souvislost, komponenty, primitivní funkce

Příklad 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Připomeňme, že **komponentou** množiny M rozumíme maximální souvislou podmnožinu M.

(1) Nechť $x \in M$. Ukažte, že sjednoceni všech souvislých podmnožin množiny M, které obsahují bod x, je komponenta množiny M.
(2) Ukažte, že každá komponenta množiny M je relativně uzavřená podmnožina M.
(3) Nechť M je otevřená v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že každá její komponenta je otevřená množina.
(4) Nechť M je otevřená v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že M má jen spočetně mnoho komponent.
(5) Ukažte na příkladu, že komponenta neotevřené množiny nemusí být relativně otevřená v M.
(6) Ukažte na příkladu, že uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ může mít nespočetně mnoho komponent.
(7) Ukažte na příkladu, že uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ nemusí mít žádnou relativně otevřenou komponentu.

`Návod:` *(2) Ukažte, že množina, která obsahuje hustou souvislou podmnožinu, je rovněž souvislá. (3) Použijte souvislost otevřené koule a bod (1). (4) Použijte separabilitu $\mathbb{R}^n$. (5) Uvažte například konvergentní posloupnost doplněnou o limitu. (6,7) Uvažte například Cantorovo diskontinuum.*

Příklad 2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená souvislá množina. Ukažte, že každé dva body z Ω lze spojit lomenou čárou v Ω.

`Návod:` *Projděte důkaz Věty III.4.*

Příklad 3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ spojitá funkce. Ukažte, že f má na Ω primitivní funkci, právě když $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou cestu φ v Ω.

`Návod:` *Použijte Větu III.5 na každou komponentu množiny Ω.*

Příklad 4. Ukažte, že funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ nemá primitivní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

`Návod:` *Spočtěte (z definice) integrál podél kladně orientované kružnice o středu* 0 *a použijte Větu III.5*

Příklad 5. Ukažte, že neexistuje holomorfní funkce L na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ splňující $e^{L(z)} = z$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

`Návod:` *Ukažte, že by muselo platit $L'(z) = \frac{1}{z}$ a použijte Příklad 4.*

Holomorfní funkce definované pomocí integrálů

Příklad 6. Položme
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
pro ta $s \in \mathbb{C}$, pro která integrál konverguje (jakožto Lebesgueův).

(1) Ukažte, že integrál konverguje, právě když $\operatorname{Re} s > 0$.
(2) Ukažte, že funkce Γ je holomorfní na množině $\Omega = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\}$ a spočtěte její derivaci.
(3) Ukažte, že pro pro $s \in \Omega$ platí $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
(4) Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!$.

`Návod:` *(2) Použijte Větu III.6 na množině* $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s \in (c, R)\}$*, kde* $0 < c < R < \infty$ *jsou libovolná. (3) Použijte integraci per partes. (4) Spočtěte* $\Gamma(1)$*, použijte (3) a matematickou indukci.*

Příklad 7. Ukažte, že funkce definovaná vzorcem
$$f(z) = \int_0^1 \frac{\cos tz}{z+t}\,\mathrm{d}t$$
je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ a spočtěte její derivaci.

Příklad 8. Ukažte, že funkce definovaná vzorcem
$$f(z) = \int_\varphi \frac{\cos w}{e^w - z}\,\mathrm{d}w,$$
kde φ je orientovaná úsečka $[0, \pi i]$ je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{e^{it}; t \in [0, \pi]\}$ a spočtěte její derivaci.

Aplikace lokální Cauchyovy věty a Cauchyova vzorce

Příklad 9. Pro $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ a $\theta \in (0, 2\pi]$ označme
$$P(a, r, R; \alpha, \theta) = \{a + \rho e^{it}; \rho \in (r, R) \;\&\; t \in (\alpha, \alpha + \theta)\}.$$

(1) Načrtněte tvar množiny $P(a, r, R; \alpha, \theta)$.
(2) Ukažte, že pro každou volbu r, R existuje $c \in (0, 2\pi)$, že kdykoli a, α, θ jsou jako výše a navíc $\theta < c$, pak množina $P(a, r, R; \alpha, \theta)$ je hvězdovitá.
(3) Nechť a, r, R, α jsou jako výše. Ukažte, že každá holomorfní funkce na $P(a, r, R; \alpha, 2\pi)$ má na této množině primitivní funkci.

`Návod:` *(3) Použijte (2), Větu III.13 a za ní následující poznámku o nalepování.*

Příklad 10. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina. Nechť f je funkce holomorfní na Ω, která na Ω nenabývá hodnoty 0.

(1) Ukažte, že existuje funkce L holomorfní na Ω, která splňuje $e^{L(z)} = f(z)$ pro $z \in \Omega$.
(2) Ukažte, že existuje funkce g holomorfní na Ω, pro kterou platí $g^2 = f$.
(3) Ukažte, že existují právě dvě funkce g_1, g_2 holomorfní na Ω splňující $g_1^2 = g_2^2 = f$.

`Návod:` *(1) Spočtěte, čemu se musí rovnat derivace funkce L, a na výslednou funkci aplikujte Větu III.13. (2) Vyjádřete g pomocí funkce L z bodu (1). (3) Nechť g je funkce, jejíž existence je zaručena bodem (2). Pak funkce g a $-g$ jsou různé a splňují $g^2 = (-g)^2 = f$. Zbývá ukázat, že neexistuje jiná taková funkce. Nechť h je holomorfní na Ω a splňuje $h^2 = f$. Zvolme $a \in \Omega$ libovolně. Pak nutně $h(a) = g(a)$ nebo $h(a) = -g(a)$ (např. díky Větičce II.6(2)). Dejme tomu, že $h(a) = g(a)$. Zvolme $0 < r < |g(a)|$. Díky spojitosti funkcí g a h existuje $\delta > 0$, že $g(U(a,\delta)) \subset U(g(a), r)$ a $h(U(a,\delta)) \subset U(g(a), r)$. Pro každé $z \in U(a,\delta)$ je $h(z)^2 = g(z)^2 = f(z)$, a tedy $h(z) = g(z)$ nebo $h(z) = -g(z)$. Protože však $h(z) \in U(g(a), r)$, $-g(z) \in U(-g(a), r)$ a $U(g(a), r) \cap U(-g(a), r) = \emptyset$, nutně $h(z) = g(z)$, a tedy $h = g$ na $U(a,\delta)$. Na závěr použijte větu o jednoznačnosti (Věta III.21).*

Příklad 11. Ukažte, že neexistuje holomorfní funkce g na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ splňující $g(z)^2 = z$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

`Návod:` *Uvažte tři kruhy: $U_1 = U(-1, 1)$, $U_2 = U(e^{i\frac{\pi}{3}}, 1)$ a $U_3 = U(e^{-i\frac{\pi}{3}}, 1)$. Na každém z nich explicitně vyjádřete funkce g_1 a g_2 z Příkladu 10(3) (využijte k tomu funkci $m_{1/2}$). Rozborem případů dokažte, že neexistuje hledaná funkce g ani na $U_1 \cup U_2 \cup U_3$.*

Příklad 12. Nechť f je celá funkce, pro kterou $f(\mathbb{C})$ není hustá podmnožina $\mathbb{C}$. Ukažte, že f je konstantní.

`Návod:` *Pokud $f(\mathbb{C})$ není hustá, pak existuje $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, že f nenabývá žádné hodnoty z kruhu $U(a, r)$. Aplikujte Liouvilleovu větu (Věta III.18) na funkci $\frac{1}{f-a}$.*

Příklad 13. Nechť f je celá funkce, která nenabývá žádné hodnoty z nějaké polopřímky. Ukažte, že f je konstantní.

`Návod:` *Existuje $a \in \mathbb{C}$ a komplexní jednotka α, že funkce $g = \alpha(f - a)$ nenabývá žádné hodnoty z polopřímky $(-\infty, 0]$. Aplikujte Příklad 12 na funkci $\log g$.*

Příklad 14. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $M \subset \Omega$ je množina izolovaná v Ω.

(1) Ukažte, že množina $\Omega \setminus M$ je otevřená.
(2) Nechť f je komplexní funkce spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus M$. Ukažte, že f je holomorfní na Ω.

Příklad 15. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f funkce holomorfní na Ω, která není konstantní. Nechť funkce $|f|$ nabývá v bodě $a \in \Omega$ lokálního minima. Ukažte, že $f(a) = 0$.

`Návod:` *Postupujte sporem. Aplikujte princip maximu modulu (Věta III.22) na funkci $\frac{1}{f}$ na nějakém kruhu o středu a a následně použijte větu o jednoznačnosti (Věta III.21).*

Příklad 16. Ukažte, že funkce Γ z Příkladu 6 lze jednoznačně rozšířit na funkci holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. (Toto rozšíření se rovněž značí Γ.)

`Návod:` *Vzorec z bodu (3) Příkladu 6 lze přepsat ve tvaru $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$. Tento vzorec lze použít jako definici holomorfní funkce na $\{s; \operatorname{Re} s > -1\} \setminus \{0\}$, která se na $\{s; \operatorname{Re} s > 0\}$ shoduje s Γ. Podobně lze pokračovat dále indukcí a pro každé $n \in \mathbb{N}$ rozšířit funkci Γ na funkci holomorfní na $\{s; \operatorname{Re} s > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, -n+1\}$. Jednoznačnost rozšíření plyne z věty o jednoznačnosti (Věta III.21).*

Příklad 17. Položme

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pro ta $s \in \mathbb{C}$, pro která řada konverguje.

(1) Ukažte, že řada konverguje absolutně, právě když $\operatorname{Re} s > 1$.
(2) Ukažte, že funkce ζ je holomorfní na polorovině $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 1\}$.

`Návod:` *(2) Ukažte, že řada na oné polorovině konverguje lokálně stejnoměrně a použijte Weierstrassovu větu (Věta III.23).*

Příklad 18. Položme

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

pro ta $s \in \mathbb{C}$, pro která řada konverguje. Symbolem ζ značme funkci z Příkladu 17.

(1) Ukažte, že řada konverguje, právě když $\operatorname{Re} s > 0$.
(2) Ukažte, že funkce g je holomorfní na polorovině $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\}$.
(3) Ukažte, že $g(s) + \zeta(s) = \frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s)$, pokud $\operatorname{Re} s > 1$.
(4) Ukažte, že funkci ζ lze jednoznačně rozšířit na funkci holomorfní na $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$.

`Návod:` *(1) Je-li $\operatorname{Re} s \leq 0$, není splněna nutná podmínka konvergence. Dále označme n-tý člena řady symbolem $a_n(s)$. Ukažte, že pro $\operatorname{Re} s > 0$ je $a_n(s) \to 0$ pro $n \to \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}(s) + a_{2n}(s))$ konverguje absolutně. Z toho odvoďte konvergenci původní řady. (2) Pro $c > 0$ ukažte, že $a_n(s) \rightrightarrows 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}(s) + a_{2n}(s))$ konverguje stejnoměrně na $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > c\}$. Z toho odvoďte, že původní řada konverguje lokálně stejnoměrně na polorovině $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\}$ a použijte Weierstrassovu větu (Věta III.23). (3) Proveďte přímý výpočet. (4) Ze vzorce v bodě (3) vyjádřete $\zeta(s)$ a výsledný vzorec použijte jako definici funkce holomorfní na $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$.*