IV. Aplikace reziduové věty

1. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, b) $\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a, b > 0)$,
d) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x$ $(a > 0)$, e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,\mathrm{d}x$, f) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N},\ n > 1)$,
g) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,\mathrm{d}x$.
[Návod: Nejprve převeďte na integrál od $-\infty$ do ∞ pomocí symetrie. Pak integrujte přes $[-R, R] \dotplus \varphi_R$, kde $\varphi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, použijte reziduovou větu a to, že integrál přes φ_R má limitu 0 pro $R \to \infty$.]

2. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ $(a > 0)$, b) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x$ $(a > 0)$, c) $\int_0^\infty \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x$ $(a, b > 0)$,
d) $\int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x^3-x}$, e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \pi x}{x^2+x}$, f) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x-8}{4x^2-1}\cos \pi x\,\mathrm{d}x$.
[Návod: Nejprve převeďte na integrál od $-\infty$ do ∞ pomocí symetrie. Pro případ e): Integrujte funkci $\frac{e^{i\pi z}}{z^2+z}$ podél křivky $[-R, -1-r] \dotplus \phi_r \dotplus [-1+r, -r] \dotplus \psi_r \dotplus [r, R] \dotplus \eta_R$, kde $R > 1$ a $r \in (0, \frac{1}{2})$, $\phi_r(t) = -1 + re^{-it}$, $t \in [-\pi, 0]$, $\psi_r(t) = re^{-it}$, $t \in [-\pi, 0]$, $\eta_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Zkoumejte limitu pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$. Ukažte, že integrál přes η_R má pro $R \to \infty$ limitu 0 (Jordanovo lemma) a spočtěte limitu integrálů přes ϕ_r a ψ_r pomocí reziduí v 0 a v -1. Na závěr uvažte imaginární část. V ostatních případech postupujte analogicky.]

3. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $(a \in (-1, 1))$, b) $\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ $(a \in (-1, 3))$, c) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a(x+b)}$ $(a \in (0, 1),\ b > 0)$, d) $\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+b)(x+2b)}$, $(|a| < 1,\ b > 0)$.
[Návod pro $a \notin \mathbb{Z}$: Proveďte substituci $x = e^y$, výslednou funkci integrujte přes obvod obdélníka o vrcholech $-R$, R, $R + 2\pi i$, $-R + 2\pi i$ a uvažte limitu pro $R \to \infty$.]

4. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x$, b) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}$, d) $\int_0^\infty \frac{\ln^k x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $(k \in \mathbb{N})$.
[Návod: Pro $0 < r < R$ a $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ uvažme křivku $(\dot{-}\,\phi_{r,\alpha}) \dotplus [re^{i\alpha}, Re^{i\alpha}] \dotplus \phi_{R,\alpha} \dotplus [Re^{-i\alpha}, re^{-i\alpha}]$, kde $\phi_{r,\alpha} = re^{it}$, $t \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$. Dále nechť $A(z) \in \operatorname{Arg}(z) \cap [0, 2\pi)$ a $L(z) = \ln|z| + iA(z)$ pro $z \neq 0$. Pro příklad d) integrujte funkci $\frac{L^k(z)}{1+z^2}$ přes uvedenou křivku. Proveďte limitní přechod pro $\alpha \to 0+$ a pak pro $r \to 0+$ a $R \to \infty$ a odvoďte rekurentní vztah pro uvedený integrál v závislosti na k. Pro ostatní případy integrujte analogickou funkci, v níž bude $L^2(z)$.]

5. Najděte součty řad:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+a^4}$, $a \in \mathbb{C}$; b) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$; c) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$;
d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$; f) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$; g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$, $a \in \mathbb{C}$, $ia \notin \mathbb{Z}$;
h) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k-c}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$; i) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k}{k-c}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
[Návod: Pro případ c) uvažte funkci $f(z) = \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{(a+z)^2}$, aplikujte reziduovou větu na integrál z f podél kružnice o středu 0 a poloměru $n + \frac{1}{2}$ a uvažte limitu pro $n \to \infty$. Použijte fakt, že funkce $\operatorname{cotg} \pi z$ je na těchto kružnicích stejně omezená. Pro případ b) postupujte analogicky, jen místo $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ použijte funkci $\frac{\pi}{\sin \pi z}$.]

6. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. [Návod: Integrujte funkci $\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ podél křivky $[r, R] \dotplus \varphi_R \dotplus [-R, -r] \dotplus (\dot{-}\,\varphi_r)$, kde $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$.)
b) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. (Návod: Podél křivky z a) integrujte funkci $\frac{1-e^{iz}}{z^2}$.)
c) $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x$ $(a, b > 0)$. (Návod: Integrujte funkci e^{-az^2} podél obvodu obdélníka s vrcholy $-R$, R, $R + i\frac{b}{2a}$, $-R + i\frac{b}{2a}$. Použijte znalost $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$.)
d) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ $(p > 1)$. (Návod: Je-li $p \in \mathbb{N}$, integrujte funkci $\frac{1}{1+z^p}$ podél křivky $[0, R] \dotplus \varphi_R \dotplus [R\exp(\frac{2\pi i}{p}), 0]$, kde φ_R je příslušný oblouk kružnice o středu 0. V obecném případě je třeba integrovat funkci $\frac{1}{1+\exp(pL(z))}$, kde $L(z) \in \operatorname{Log}(z)$ je takové, že $\operatorname{Im} L(z) \in [-\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$ je dost malé ($\varepsilon < 2\pi(1 - \frac{1}{p})$), a kolem bodu 0 je třeba přidat oblouk kružnice jako v příkladu VIII/5.)
e) $\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. (Návod: Integrujte funkci $\frac{z}{z^4+1}$ přes křivku jako v případě d) pro $p = 4$.)
f) $\int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $(a, b \in \mathbb{R})$. (Návod: Integrujte funkci $\frac{e^{2iaz}-e^{2ibz}}{z^2}$ přes křivku z a).)
g) $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x$. (Návod: Integrujte funkci $\frac{3e^{iz}-e^{3iz}}{z^3}$ přes křivku z a).)

Výsledky a návody. **1.** a) $\frac{\pi}{2^{2n-1}} \cdot \binom{2n-2}{n-1}$, b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, c) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$, d) $\frac{\pi}{16a^3}$, e) $-\frac{\pi}{27}$, f) 0 pro n liché, $\frac{2\pi}{n}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$ pro n sudé, g) $\frac{5}{12}\pi$. **2.** a) $\frac{\pi e^{-a}}{2a}$, b) $\frac{\pi e^{-a}}{4a^3}(a+1)$, c) $\frac{\pi}{2}(2^{-ab} - 1)$, d) $-\pi$, e) 2π, f) 4π. **3.** a) $\frac{\pi}{2}$ pro $a = 0$, $\pi\frac{\sin\frac{\pi a}{2}}{\sin \pi a}$ pro $a \neq 0$, b) 2 pro $a = 1$, $-\frac{\pi}{4} \cdot \frac{a-1}{\cos\frac{\pi a}{2}}$ pro $a \neq 1$, c) $\frac{\pi}{b^a \sin \pi a}$, d) $(2^a - 1)\frac{\pi \sin \ln 2}{4\cosh\frac{\pi}{2}}$ pro $a \neq 0$, $-\frac{\ln 2}{b}$ pro $a = 0$. **4.** a) $-\frac{1}{2}$, b) 0, c) $-\frac{1}{4}\pi$, d) $I_{2k+1} = 0$, $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_{2k} = -\frac{1}{2k+1}((-1)^{k+1}\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}}(3^{2k+1} - 1) + \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{2k+1}{2j}(2\pi)^{2k-2j}I_{2j})$. **5.** a) $\frac{\pi^2}{6}$ pro $a = 0$, $\frac{\pi}{2a\sqrt{2}} \cdot \frac{\sinh \pi a\sqrt{2} - \sin \pi a\sqrt{2}}{\cosh \pi a\sqrt{2} - \cos \pi a\sqrt{2}}$ jinak; b) $\frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$, c) $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$, d) $\frac{\pi^2}{6}$, e) $-\frac{\pi^2}{12}$, f) $\frac{2\pi}{3}\operatorname{tgh}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, g) $\frac{1}{2a^2}(1 + \frac{\pi a}{\sin \pi a})$, h) $-\pi \operatorname{cotg} \pi c$, i) $-\frac{\pi}{\sin \pi c}$. **6.** a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{\pi}{2}$, c) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\frac{b^2}{4a})$, d) $\frac{\pi/p}{\sin(\pi/p)}$, e) π, f) $\pi(b - a)$, g) $\frac{\pi}{8}$.