Věta III.10 $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená $\Rightarrow \Omega = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$, kde

- J je nejvýše spočetná množina
- $\forall j \in J$: Ω_j je neprázdná oblast
- $\Omega_j \cap \Omega_{j'} = \emptyset$ pro $j \neq j'$

Navíc toto vyjádření je jednoznačné až na očíslování.

Dk: Pro $w \in \Omega$ označme $C(w) = \{z \in \Omega;\ z$ lze spojit s w lomenou čarou v $\Omega\}$

Pak platí:

① $w \in C(w)$ ⌜použijme degenerovanou lomenou čáru⌟

② $\bigcup_{w \in \Omega} C(w) = \Omega$ ⌜plyne z ①⌟

③ $C(w)$ je otevřená

⌜ $z \in C(w) \Rightarrow \exists r > 0 : U(z,r) \subset \Omega$, protože Ω je otevřená

Pak $U(z,r) \subset C(w)$:

$u \in U(z,r) \Rightarrow$ úsečka uz je obsažena v $U(z,r) \subset \Omega$

z lze spojit s w lomenou čarou v Ω

Tedy u lze spojit s w lomenou čarou v Ω

⌜vezmeme úsečku z u do z a navážeme lomenou čáru do w⌟⌟

$\Rightarrow u \in C(w)$ ⌟

④ L lomená čára ze z do w v Ω $\Rightarrow L \subset C(w)$

⌜$u \in L \Rightarrow u$ spojím s w lomenou čárou v Ω, konkrétně částí L od u do w⌟

⑤ $C(w)$ je oblast

⌜$z_1, z_2 \in C(w) \Rightarrow$ najdu lomenou čáru L_1 spojující z_1 s w

a lomenou čáru L_2 spojující w s z_2

Dle ④ jsou $L_1, L_2 \subset C(w)$, tedy z_1 spojím se z_2 lomenou čarou v $C(w)$

— L_1 spojí z_1 s w, pak navážeme L_2 do z_2 ⌟

(6) $C(w_1) \cap C(w_2) \neq \emptyset \implies C(w_1) = C(w_2)$

[zvolme $u \in C(w_1) \cap C(w_2)$

Ukážeme $C(w_1) \subset C(w_2)$, opačná inkluze je analogická:

$z \in C(w_1) \implies$ z lze spojit lomenou čarou s w_1 v Ω

w_1 lze spojit lomenou čarou s u v Ω (protože $u \in C(w_1)$)

u lze spojit lomenou čarou s w_2 v Ω (protože $u \in C(w_2)$)

Spojení těchto tří lomených čar spojuje z s w_2.

$\implies z \in C(w_2)$]

(7) $C(w), w \in \Omega$ je pokrytí Ω oblastmi (z (2) & (5))

Navíc různé množiny $C(w)$ jsou disjunktní (z (6))

Máme tedy disjunktní pokrytí Ω oblastmi. Toto pokrytí je spočetné (nejvýše), protože každá z oblastí obsahuje prvek $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, což je spočetná množina.

Tím je dokázána existence

(8) Jednoznačnost: $\Omega = \bigcup_{j \in J} \Omega_j = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ dva rozklady splňující tři podmínky

Pak $\forall \gamma \in \Gamma \; \exists j \in J : \Omega_j = G_\gamma$:

$$\gamma \in \Gamma \implies G_\gamma = \Omega \cap G_\gamma = \bigcup_{j \in J} \underbrace{(\Omega_j \cap G_\gamma)}_{\text{otevřené po dvou disjunktní množiny}}$$

$G_\gamma \neq \emptyset \implies \exists j \in J \;\; \Omega_j \cap G_\gamma \neq \emptyset$

pak $\Omega_j \cap G_\gamma$ je otevřená

$G_\gamma \setminus \Omega_j = \bigcup_{j' \in J \setminus \{j\}} \Omega_{j'} \cap G_\gamma$ je též otevřená

$$\xRightarrow{G_\gamma \text{ oblast}} G_\gamma = \Omega_j$$

Analogicky $\forall j \in J \; \exists \gamma \in \Gamma : \Omega_j = G_\gamma$.