

ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – LS 2024/2025

PŘÍKLADY KE KAPITOLÁM I A II

DERIVACE PODLE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ, CAUCHY-RIEMANNOVY PODMÍNKY

Příklad 1. Ukažte, že funkce $f(z) = \bar{z}$ nemá derivaci podle komplexní proměnné v žádném bodě; a to jednak pomocí Cauchy-Riemannových podmínek a jednak přímo z definice derivace.

Definice. Podmnožina $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazývá **oblast**, pokud

- Ω je otevřená;
- Ω je **souvislá**, tj. Ω nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných disjunktních otevřených množin.

Příklad 2. Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funkce splňující $f'(z) = 0$ pro každé $z \in \Omega$. Ukažte, že f je konstantní na Ω .

Návod: Pomocí věty o střední hodnotě ukažte, že f je konstantní na každé úsečce obsažené v Ω . Dále zvolme $z_0 \in \Omega$. Ukažte, že množina $\{z \in \Omega; f(z) = f(z_0)\}$ je relativně uzavřená i relativně otevřená v Ω .

Příklad 3. Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $n \in \mathbb{N}$ a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funkce splňující $f^{(n)}(z) = 0$ pro každé $z \in \Omega$ ($f^{(n)}$ je n -tá derivace f podle komplexní proměnné). Ukažte, že f je polynom stupně nejvýše $n - 1$.

Návod: Použijte Příklad 2 a matematickou indukci.

Příklad 4. Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je funkce holomorfní na Ω . Ukažte, že f je konstantní, pokud je splněna jedna z následujících podmínek:

- (1) f nabývá na Ω jen reálných hodnot.
- (2) Funkce $\bar{f}$ je rovněž holomorfní na Ω .
- (3) Existují čísla $a, b \in \mathbb{R}$, ne obě nulová, pro která je funkce $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f$ konstantní na Ω .
- (4) Existují čísla $a, b \in \mathbb{C}$, ne obě nulová, pro která je funkce $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f$ konstantní na Ω .

Návod: (1) Použijte Cauchy-Riemannovy podmínky a Příklad 2. (2) Bud' lze použít Cauchy-Riemannovy podmínky na obě funkce f a $\bar{f}$ a následně Příklad 2; nebo lze aplikovat bod (1) na funkce $f + \bar{f}$ a $i(f - \bar{f})$. (3) Nalezněte $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, pro která funkce $\alpha f + \beta$ splňuje předpoklady bodu (1). Jiná možnost je použít Cauchy Riemannovy podmínky, s použitím řešení vhodné soustavy lineárních rovnic dokázat, že $f' = 0$ na Ω , a následně použít Příklad 2. (4) Ukažte, že lze bod (3) aplikovat buď na dvojici $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b$ nebo na dvojici $\operatorname{Im} a, \operatorname{Im} b$.

Příklad 5. Necht' $z, w \in \mathbb{C}$.

- (1) Ukažte, že $\sin z = \sin w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi$ nebo $w + z = (2k + 1)\pi$.
- (2) Ukažte, že $\cos z = \cos w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi$ nebo $w + z = 2k\pi$.
- (3) Ukažte, že $\sinh z = \sinh w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi i$ nebo $w + z = (2k + 1)\pi i$.
- (4) Ukažte, že $\cosh z = \cosh w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi i$ nebo $w + z = 2k\pi i$.

Návod: (1,2) Použijte definici funkcí $\sin$ a $\cos$, řešení kvadratické rovnice a skutečnost, že $\exp z = \exp w$, právě když $w - z$ je celočíselný násobek $2\pi i$. (3,4) Použijte (1,2) a skutečnost, že $\sinh z = -i \sin iz$ a $\cosh z = \cos iz$ pro $z \in \mathbb{C}$.

Příklad 6. Necht' $w \in \mathbb{C}$.

- (1) Ukažte, že rovnice $\sin z = w$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{C}$, a najděte všechna řešení.
- (2) Ukažte, že rovnice $\cos z = w$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{C}$, a najděte všechna řešení.
- (3) Pro které hodnoty $w \in \mathbb{C}$ mají uvedené rovnice řešení v $\mathbb{R}$? Jsou pak všechna řešení reálná?
- (4) Pro které hodnoty $w \in \mathbb{C}$ mají uvedené rovnice ryze imaginární řešení?

Návod: (1,2) Použijte definici funkcí $\sin$ a $\cos$ a řešení kvadratické rovnice. Řešení vyjádřete pomocí funkcí $m_{1/2}$ a $\log$. (3) Použijte znalosti o chování goniometrických funkcí na $\mathbb{R}$ a Příklad 5. (4) Použijte body (1,2).

Příklad 7. Definujme funkci tg předpisem $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro která $\cos z \neq 0$.

- (1) Určete definiční obor funkce tg a ukažte, že funkce tg je na svém definičním oboru holomorfní.
- (2) Ukažte, že funkce tg nenabývá hodnot i a $-i$.
- (3) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ má rovnice $\operatorname{tg} z = w$ nekonečně mnoho řešení a najděte je.
- (4) Necht' $z, w \in \mathbb{C}$ patří do definičního oboru funkce tg . Ukažte, že $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} w$, právě když $z - w$ je celočíselný násobek π .

Návod: (2,3) Použijte definici funkcí $\sin$ a $\cos$ a řešení kvadratické rovnice. Řešení vyjádřete pomocí funkce $\log$. (4) Odvoďte z výsledku (3).

Příklad 8. Definujme funkci cotg předpisem $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro která $\sin z \neq 0$.

- (1) Určete definiční obor funkce cotg a ukažte, že funkce cotg je na svém definičním oboru holomorfní.
- (2) Ukažte, že funkce cotg nenabývá hodnot i a $-i$.
- (3) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ má rovnice $\operatorname{cotg} z = w$ nekonečně mnoho řešení a najděte je.
- (4) Necht' $z, w \in \mathbb{C}$ patří do definičního oboru funkce cotg . Ukažte, že $\operatorname{cotg} z = \operatorname{cotg} w$, právě když $z - w$ je celočíselný násobek π .

Návod: Použijte Příklad 7 a vztah funkcí tg a cotg .

Příklad 9. Uvažme funkci $f(z) = \exp \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- (1) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ má rovnice $f(z) = w$ nekonečně mnoho řešení a že tato řešení tvoří posloupnost s limitou 0.
- (2) Ukažte, že pro každé $\delta > 0$ je $f(P(0, \delta)) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- (3) Ukažte, že v každém prstencovém okolí nuly nabývá f všech komplexních nenulových hodnot nekonečněkrát.

Příklad 10. Uvažme funkce $f_1(z) = \sin \frac{1}{z}$ a $f_2(z) = \cos \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Necht' $j \in \{1, 2\}$.

- (1) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C}$ má rovnice $f_j(z) = w$ nekonečně mnoho řešení a že tato řešení tvoří posloupnost s limitou 0.
- (2) Ukažte, že pro každé $\delta > 0$ je $f_j(P(0, \delta)) = \mathbb{C}$.
- (3) Ukažte, že v každém prstencovém okolí nuly nabývá f_j všech komplexních hodnot nekonečněkrát.

Příklad 11. Necht' $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $a \in \mathbb{C}$. Necht' $M_a(z)$ je množina hodnot a -té mocniny komplexního čísla z (viz oddíl II.3).

- (1) Necht' $a \in \mathbb{Z}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ obsahuje právě jeden bod.
- (2) Necht' $a \in \mathbb{Q}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ obsahuje konečně mnoho bodů.
- (3) Necht' $a \in \mathbb{R}$. Ukažte, že každý prvek $w \in M_a(z)$ splňuje $|w| = |z|^a$.
- (4) Necht' $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ je hustá podmnožina kružnice $\{w \in \mathbb{C}; |w| = |z|^a\}$.
- (5) Necht' $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ je nekonečná a lze ji vyjádřit ve tvaru $M_a(z) = \{w_k; k \in \mathbb{Z}\}$, kde $w_k \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow -\infty$ a $|w_k| \rightarrow +\infty$ pro $k \rightarrow +\infty$.

Návod: Použijte definice, vlastnosti funkce $\exp$ a množiny $\text{Log}(z)$. V bodě (4) navíc použijte známý fakt, že pro $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je množina $\{\exp(i\pi na); n \in \mathbb{Z}\}$ hustá v jednotkové kružnici.

Příklad 12. Necht' A je libovolná polopřímka s počátečním bodem 0. Ukažte, že existuje holomorfní funkce f na $\mathbb{C} \setminus A$, pro kterou platí $\exp(f(z)) = z$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus A$.

Návod: Existuje $t \in (-\pi, \pi]$, pro které $A = \{re^{it}; r \in [0, +\infty)\}$.

Příklad 13. Necht' $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- (1) Vyjádřete $\log(wz)$ pomocí $\log w$ a $\log z$. Kdy platí $\log(wz) = \log w + \log z$?
- (2) Jaký je vztah mezi množinami $\text{Log}(wz)$ a $\text{Log } w + \text{Log } z = \{a + b; a \in \text{Log } w, b \in \text{Log } z\}$?

Příklad 14. Necht' $w, z, a, b \in \mathbb{C}$, $z, w \neq 0$.

- (1) Jaký je vztah mezi čísly $m_{a+b}(z)$ a $m_a(z) \cdot m_b(z)$? Kdy se rovnají?
- (2) Jaký je vztah mezi množinami $M_{a+b}(z)$ a $M_a(z) \cdot M_b(z) = \{u \cdot v; u \in M_a(z), v \in M_b(z)\}$?
- (3) Jaký je vztah mezi čísly $m_{ab}(z)$ a $m_a(m_b(z))$? Kdy se rovnají?
- (4) Jaký je vztah mezi množinami $M_{ab}(z)$, $M_a(m_b(z))$, $m_a(M_b(z)) = \{m_a(u); u \in M_b(z)\}$ a $M_a(M_b(z)) = \bigcup_{u \in M_b(z)} M_a(u)$?
- (5) Jaký je vztah mezi čísly $m_a(zw)$ a $m_a(z) \cdot m_a(w)$? Kdy se rovnají?
- (6) Jaký je vztah mezi množinami $M_a(zw)$ a $M_a(z) \cdot M_a(w) = \{u \cdot v; u \in M_a(z), v \in M_a(w)\}$?