Vysvětlení k Lagrangeově větě pro pokročilé, tj. Větě V.19

V této větě je množina M určena m rovnicemi, tedy je průnikem nulových vrstevnic funkcí $g_1, g_2, \dots, g_m$. Podstatné je i to, že $m < n$, tedy počet vazeb je menší než dimenze prostoru. Takže například v $\mathbb{R}^3$, tedy v trojrozměrném prostoru můžeme uvažovat množiny určené jednou nebo dvěma vazbami.

Množina G je základní otevřená množina, ve které se vše odehrává. Může to být celý prostor $\mathbb{R}^n$, ale může to být i výrazně menší množina. Její funkce spočívá jednak v tom, že vazbové funkce $g_1, g_2, \dots, g_m$ i funkce f, jejíž extrémy hledáme, jsou na ní definované a třídy C^1, a dále může zahrnovat omezení daná nerovnostmi, jak uvidíme na příkladech.

Předpoklady této věty jsou:

- G je otevřená pomnožina $\mathbb{R}^n$;
- $m < n$;
- $g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$;
- $f \in C^1(G)$.

Pak uvažujeme množinu M – průnik nulových vrstevnic funkcí $g_1, \dots, g_m$ v rámci množiny M a hledáme extrémy funkce f na množině M. Tato věta nám dává nutnou podmínku pro lokální extrém funkce f vzhledem k množině M:

Pokud funkce f má v bodě $\boldsymbol{a} \in M$ lokální extrém vzhledem k množině M, pak platí (alespoň) jedna z následujících podmínek:

- **Buď jsou vektory $\nabla g_1(\boldsymbol{a}), \dots, \nabla g_m(\boldsymbol{a})$ lineárně závislé;**
- **nebo existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, pro která platí**

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) + \lambda_1 \nabla g_1(\boldsymbol{a}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}.$$

Co znamená, že vektory jsou *lineárně závislé*, zatím nevíme, definice bude v kapitole VI, kde si zároveň vysvětlíme význam tohoho pojmu. Zde si vysvětlíme jen, jak je to pro jeden nebo dva vektory. To pro běžné počítání bude stačit, protože budeme počítat příklady s jednou nebo dvěma vazbami.

- Jeden vektor je *lineárně závislý*, pokud je nulový. Tedy v případě, že $m = 1$ a máme tedy jen jednu vazbovou funkci g_1, pak první možnost znamená, že $\nabla g_1(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$. Tento případ je tedy zcela analogický Větě V.18 – je to vlastně verze Věty V.18 pro obecné $n \geq 2$.

- Dvojice vektorů je *lineárně závislá*, pokud jeden z nich je násobkem druhého. Tedy v případě $m = 2$, kdy máme dvě vazbové funkce g_1, g_2, pak první možnost znamená:

  - Buď existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $\nabla g_2(\boldsymbol{a}) = \alpha \cdot \nabla g_1(\boldsymbol{a})$,
  - nebo existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $\nabla g_1(\boldsymbol{a}) = \alpha \cdot \nabla g_2(\boldsymbol{a})$.

  Testovat je třeba obě možnosti, protože předem nevíme, který z vektorů je násobkem toho druhého. (Když jeden z nich je nulový a druhý nenulový, je první násobkem druhého (nulovým), ale první není násobkem druhého, protože každý násobek nulového vektoru je zase nulový vektor.)

  V některých případech stačí testovat jednu možnost. Například, pokud víme, že $\nabla g_1(\boldsymbol{a})$ nemůže být nulový, pak stačí testovat, kdy $\nabla g_2(\boldsymbol{a})$ je násobkem $\nabla g_1(\boldsymbol{a})$. Důvod je ten, že pokud v tomto případě platí $\nabla g_1(\boldsymbol{a}) = \alpha \nabla g_2(\boldsymbol{a})$, pak nutně $\alpha \neq 0$ (protože $\nabla g_1(\boldsymbol{a})$ není nulový), a tedy $\nabla g_2(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{\alpha} \nabla g_1(\boldsymbol{a})$. To ilustrujeme na příkladech.

Poznámky k důkazu: Pro případ $m = 1$ je důkaz velmi podobný důkazu Věty V.18: V případě, že $\nabla g_1(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{o}$, pak jedna z parciálních derivací je nenulová. Použijeme Větu V.16, nulová hladina funkce g_1 je pak v okolí bodu $\boldsymbol{a}$ grafem C^1 funkce $n - 1$ proměnných. Příslušná složená funkce má pak v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém, použijeme Větu V.6 a Větu V.14 a stejný závěrečný trik jako při důkazu Věty V.18.

Obecný případ se dokáže podobně, jen se musí použít Věta V.17. Je to ovšem složitější mj. kvůli nutnosti pracovat s maticemi. Každopádně se důkazem nebudeme blíže zabývat.