IV.3 Derivace funkce – definice a početní technika

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, pokud tato limita existuje;
- **derivací zprava funkce** f **v bodě** a budeme rozumět $f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, pokud tato limita existuje;
- **derivací zleva funkce** f **v bodě** a budeme rozumět $f'_-(a) = \lim_{x \to a-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, pokud tato limita existuje.
- Derivaci funkce v bodě (zprava, zleva) nazýváme **vlastní**, je-li příslušná limita vlastní; **nevlastní**, je-li příslušná limita nevlastní.

Poznámka. Derivaci lze ekvivalentně definovat limitami:
$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$; $f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$; $f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Definice. Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Pak přímku danou rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ nazýváme **tečnou ke grafu funkce** f **v bodě** $[a, f(a)]$.

Větička 11. *Funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ derivaci $A \in \mathbf{R}^*$, právě když $f'_+(a) = f'_-(a) = A$.*

Věta 12. *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci zprava, je spojitá v bodě a zprava. Podobně pro derivaci zleva.

Věta 13 (aritmetika derivací). *Nechť f a g mají v bodě a vlastní derivaci a $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom platí*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $\quad (f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$,
$(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$;

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Poznámka. V tvrzení (i) lze předpoklad existence vlastních derivací nahradit předpokladem, že výraz na pravé straně je definován. V případě tvrzení (ii) a (iii) je to složitější.

Věta 14 (derivace složené funkce). *Nechť f má vlastní derivaci v bodě y_0. Nechť g má vlastní derivaci v bodě x_0 a $g(x_0) = y_0$. Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$