

## IV.8 Konvexní a konkávní funkce

**Poznámka.** Nechť  $x_1 < x_2$  a  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ . Pak bod

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = x_1 + (1 - \lambda)(x_2 - x_1)$$

patří do intervalu  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . Pokud  $\lambda \in (0, 1)$ , pak onen bod patří do  $(x_1, x_2)$ . A obráceně, pro každé  $z \in \langle x_1, x_2 \rangle$  existuje právě jedno  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ , pro které platí  $z = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ .

**Definice.** Řekneme, že funkce  $f$  je na intervalu  $I$

- **konvexní**, jestliže pro každé  $x_1, x_2 \in I$  a každé  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  platí  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2)$ .
- **konkávní**, jestliže pro každé  $x_1, x_2 \in I$  a každé  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  platí  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2)$ .
- **ryze konvexní**, jestliže pro každé  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 \neq x_2$  a každé  $\lambda \in (0, 1)$  platí  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2)$ .
- **ryze konkávní**, jestliže pro každé  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 \neq x_2$  a každé  $\lambda \in (0, 1)$  platí  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2)$ .

**Poznámka.** Funkce  $f$  je (ryze) konkávní na intervalu  $I$ , právě když funkce  $-f$  je (ryze) konvexní na  $I$ .

**Větička 37.** Nechť  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $I$ . Pak následující tři tvrzení jsou ekvivalentní.

- Funkce  $f$  je na  $I$  konvexní.*
- Pro každou trojici bodů  $x_1, x_2, x_3 \in I$  takovou, že  $x_1 < x_2 < x_3$ , platí 
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$*
- Pro každou trojici bodů  $x_1, x_2, x_3 \in I$  takovou, že  $x_1 < x_2 < x_3$ , platí 
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$*

**Poznámka.** Analogické charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

**Věta 38.** Nechť  $f$  má v každém bodě otevřeného intervalu  $I$  vlastní derivaci. Pak funkce  $f$  je konvexní, právě když je funkce  $f'$  neklesající na  $I$ . Funkce  $f$  je ryze konvexní na  $I$ , právě když funkce  $f'$  je rostoucí na  $I$ .

**Poznámka.** Analogická věta platí pro konkávnost a ryzí konkávnost.

**Definice.** Druhou derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  rozumíme

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

jestliže tato limita existuje. Druhá derivace funkce  $f$  je tedy derivace její derivace. Obdobně definujeme derivace vyšších řádů,  $n$ -tou derivaci funkce  $f$  v bodě  $a$  značíme  $f^{(n)}(a)$ . Je přitom

$$f^{(1)}(a) = f'(a), \quad f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a) \text{ pro } n \in \mathbf{N}.$$

**Věta 39.** Nechť  $f$  má v každém bodě otevřeného intervalu  $I$  vlastní druhou derivaci. Pak platí:

- (i) Funkce  $f$  je konvexní na intervalu  $I$ , právě když  $f''(x) \geq 0$  pro každé  $x \in I$ .
- (ii) Je-li  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in I$ , je  $f$  ryze konvexní na  $I$ .

**Poznámka.** Analogická věta platí pro konkávnost a ryzí konkávnost.

**Definice.** Nechť  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $a \in \mathbf{R}$  a  $T_a$  označuje tečnu ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(a, f(a))$ . Řekneme, že bod  $[x, f(x)]$  leží pod tečnou  $T_a$ , jestliže  $f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ . Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod  $[x, f(x)]$  leží nad tečnou  $T_a$ .

**Definice.** Nechť  $f$  má v bodě  $a$  vlastní derivaci. Řekneme, že  $a$  je inflexním bodem funkce  $f$ , jestliže existuje  $\Delta > 0$  takové, že platí

- (i)  $\forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)]$  leží pod tečnou,
- (ii)  $\forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)]$  leží nad tečnou,

nebo

- (i)  $\forall x \in (a - \Delta, a) : [x, f(x)]$  leží nad tečnou,
- (ii)  $\forall x \in (a, a + \Delta) : [x, f(x)]$  leží pod tečnou.

**Věta 40** (nutná podmínka pro inflexní bod). Nechť  $f''(a)$  existuje a je různá od 0. Potom  $a$  není inflexním bodem funkce  $f$ .

**Věta 41** (postačující podmínka pro inflexní bod). Nechť funkce  $f$  má spojitou první derivaci na intervalu  $(a, b)$  a  $z \in (a, b)$ . Nechť platí:

$$\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (z, b) : f''(x) < 0.$$

Potom  $z$  je inflexním bodem funkce  $f$ .