

## I.3. Číselné množiny

### RACIONÁLNÍ ČÍSLA

- Množina přirozených čísel je

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

- Množina celých čísel je

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbf{N}\} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

- Množina racionálních čísel je

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} \right\}.$$

Přitom  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$ , právě když  $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$ .

### REÁLNÁ ČÍSLA

Množina reálných čísel je množina  $\mathbf{R}$ , na níž jsou definovány operace sčítání a násobení (značíme  $+$  a  $\cdot$ ) a relace uspořádání (značíme  $\leq$ ), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

#### I. Vlastnosti sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
- $\forall x, y \in \mathbf{R} : x + y = y + x$ ;
- V  $\mathbf{R}$  existuje takový prvek (značíme ho  $0$  a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna  $x \in \mathbf{R}$  platí  $x + 0 = x$ .
- $\forall x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R} : x + y = 0$  (takové  $y$  je jen jedno, značíme ho  $-x$ );
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ;
- $\forall x, y \in \mathbf{R} : x \cdot y = y \cdot x$ ;
- V  $\mathbf{R}$  existuje nenulový prvek (značíme ho  $1$  a říkáme mu jednotkový prvek) takový, že pro všechna  $x \in \mathbf{R}$  je  $1 \cdot x = x$ ;
- $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbf{R} : x \cdot y = 1$  (takové  $y$  je jen jedno, značíme ho  $x^{-1}$  nebo  $\frac{1}{x}$ );
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ .

#### II. Vlastnosti uspořádání a jeho vztah k operacím

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : (x \leq y \ \& \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ ;
- $\forall x, y \in \mathbf{R} : (x \leq y \ \& \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ ;
- $\forall x, y \in \mathbf{R} : x \leq y \vee y \leq x$ ;
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ ;
- $\forall x, y \in \mathbf{R} : (0 \leq x \ \& \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ .

#### III. Axiom infima

Nechť  $M \subset \mathbf{R}$  je neprázdná a navíc existuje  $a \in \mathbf{R}$  takové, že pro všechna  $x \in M$  platí  $x \geq a$ . Pak existuje číslo  $s \in \mathbf{R}$ , které má vlastnosti:

- $\forall x \in M : x \geq s$ ;
- $\forall s' \in \mathbf{R}, s' > s \exists x \in M : x < s'$ .

**Definice.** Číslo  $a \in \mathbf{R}$  se nazývá **dolní závorou** množiny  $M \subset \mathbf{R}$ , jestliže pro každé  $x \in M$  platí  $x \geq a$ . Množina  $M \subset \mathbf{R}$  se nazývá **zdola omezená**, jestliže má nějakou dolní závoru. Analogicky se definuje **horní závora** a **shora omezená množina**. Množina se nazývá **omezená**, je-li zároveň shora omezená i zdola omezená.

**Poznámky:**

- (1) Číslo  $s$  z axiomu infima je jednoznačně určeno, značí se  $\inf M$  a říká se mu **infimum** množiny  $M$ .
- (2) S použitím nově definovaných pojmů lze axiom infima přeformulovat takto: *Každá neprázdná zdola omezená podmnožina  $\mathbf{R}$  má infimum.*
- (3) Infimum množiny  $M$  je její největší dolní závora.
- (4) Nejmenší horní závora množiny  $M$  (pokud existuje) nazýváme **supremum** množiny  $M$  a značíme  $\sup M$ .
- (5) Uvedené vlastnosti množinu reálných čísel popisují jednoznačně.
- (6) Platí  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ .

## KOMPLEXNÍ ČÍSLA

**Množinou komplexních čísel** rozumíme množinu všech výrazů tvaru  $a + bi$ , kde  $a, b \in \mathbf{R}$ . Množinu komplexních čísel značíme  $\mathbf{C}$ . Na  $\mathbf{C}$  jsou definovány operace sčítání a násobení, splňují vlastnosti skupiny I a navíc platí  $i^2 = -1$ .

**Věta 4** (základní věta algebry). *Nechť  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ ,  $a_n \neq 0$ . Pak rovnice  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$  má alespoň jedno řešení  $z \in \mathbf{C}$ .*

## DŮSLEDKY AXIOMU INFIMA

**Věta 5** (o supremu). *Každá neprázdná shora omezená podmnožina  $\mathbf{R}$  má supremum.*

**Věta 6** (o existenci celé části). *Pro každé reálné číslo  $x$  existuje právě jedno celé číslo  $k$ , pro které platí  $k \leq x < k + 1$ . Toto  $k$  nazýváme **celou částí čísla  $x$**  a značíme  $k = [x]$ .*

**Věta 7** (Archimedova vlastnost). *Pro každé reálné číslo  $x$  existuje přirozené číslo  $n$  takové, že  $n > x$ .*

**Věta 8** (o existenci  $n$ -té odmocniny). *Pro každé  $x \in \langle 0, +\infty \rangle$  a každé  $n \in \mathbf{N}$  existuje právě jedno  $y \in \langle 0, +\infty \rangle$ , pro které  $y^n = x$ .*

**Věta 9** (o hustotě  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ). *Pro každá dvě reálná čísla  $a, b$  splňující  $a < b$  existuje  $p \in \mathbf{Q} \cap (a, b)$  a  $r \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap (a, b)$ .*