

## V.5 Funkce třídy $C^1$

**Definice.** Nechť  $G \subset \mathbf{R}^n$  je otevřená množina a  $f : G \rightarrow \mathbf{R}$  je funkce  $n$  proměnných. Řekneme, že  $f$  je **třídy  $C^1$  na  $G$** , jestliže funkce  $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$  je spojitá na  $G$  pro každé  $j \in \{1, \dots, n\}$  (tj. pokud „ $f$  má na  $G$  spojitě parciální derivace prvního řádu“). Množinu všech funkcí třídy  $C^1$  na  $G$  značíme  $C^1(G)$ .

**Definice.** Nechť  $G \subset \mathbf{R}^n$  je otevřená množina,  $f : G \rightarrow \mathbf{R}$  je funkce třídy  $C^1$  a  $\mathbf{a} \in G$ . Pak graf funkce

$$T : \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})(x_n - a_n), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

se nazývá **tečnou nadrovinou ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$** .

**Poznámka.** Je-li  $n = 1$ , pak tečná nadrovina je tečna; pro  $n = 2$  tečné nadrovině říkáme **tečná rovina**.

**Věta 10** (slabá věta o střední hodnotě). *Nechť*

$$G = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : x_i \in (a_i, b_i) \text{ pro } i = 1, \dots, n\},$$

kde  $a_i, b_i \in \mathbf{R}$  splňují  $a_i < b_i$  pro  $i = 1, \dots, n$ . *Nechť funkce  $f : G \rightarrow \mathbf{R}$  má v každém bodě množiny  $G$  konečné parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných. Nechť  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ . Pak existují reálná čísla  $\xi_1, \dots, \xi_n$  taková, že  $\xi_i$  leží mezi  $u_i$  a  $v_i$  (tj. v uzavřeném intervalu s krajními body  $u_i$  a  $v_i$ ) a platí*

$$f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_1, \dots, u_{i-1}, \xi_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \cdot (v_i - u_i).$$

**Poznámka.** Pro  $n = 2$  má poslední rovnost tvar

$$f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, v_2) \cdot (v_1 - u_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u_1, \xi_2) \cdot (v_2 - u_2).$$

**Věta 11** (o tečnosti tečné nadroviny). *Nechť  $f$  je funkce třídy  $C^1$  na otevřené množině  $G \subset \mathbf{R}^n$  a  $\mathbf{a} \in G$ . Je-li  $T$  funkce z definice tečné nadroviny, pak bod  $[\mathbf{a}, f(\mathbf{a})]$  leží na grafu  $T$  a platí  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x}, \mathbf{a})} = 0$ .*

**Věta 12.** *Nechť  $G \subset \mathbf{R}^n$  je otevřená. Je-li funkce  $f$  třídy  $C^1$  na  $G$ , pak je  $f$  spojitá na  $G$ .*

**Definice.** Nechť  $G \subset \mathbf{R}^n$  je otevřená množina,  $f \in C^1(G)$  a  $\mathbf{a} \in G$ . **Gradientem** funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  rozumíme vektor

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right].$$

**Věta 13** (o derivaci složené funkce). Nechť  $r, s \in \mathbf{N}$  a  $G \subset \mathbf{R}^s$ ,  $H \subset \mathbf{R}^r$  jsou otevřené množiny. Nechť  $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G)$  a funkce  $f : H \rightarrow \mathbf{R}$  je třídy  $C^1$  na  $H$ . Je-li složená funkce  $F : G \rightarrow \mathbf{R}$  určena předpisem

$$F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_r(\mathbf{x}))$$

definována na  $G$ , pak  $F \in C^1(G)$ . Jestliže  $\mathbf{a} \in G$  a  $\mathbf{b} = [\varphi_1(\mathbf{a}), \dots, \varphi_r(\mathbf{a})]$ , pak pro  $j \in \{1, \dots, s\}$  platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathbf{b}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

**Definice.** Nechť  $f$  je funkce  $n$  proměnných,  $i \in \{1, \dots, n\}$  a  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existuje v každém bodě otevřené množiny  $G$ . Pak definujeme parciální derivace druhého řádu předpisem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

kde  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů.

**Věta 14.** Nechť  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  a funkce  $f$  má na okolí bodu  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$  obě derivace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  a  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  a tyto funkce jsou v bodě  $\mathbf{a}$  spojité. Pak  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ .

**Definice.** Nechť  $G \subset \mathbf{R}^n$  je otevřená množina. Řekneme, že funkce  $f$  je

- třídy  $C^2$  na  $G$ , má-li na  $G$  spojité všechny parciální derivace druhého řádu;
- třídy  $C^\infty$  na  $G$ , má-li na  $G$  spojité všechny parciální derivace všech řádů.

Analogicky se definuje funkce třídy  $C^k$  pro každé  $k \in \mathbf{N}$ .