# V.9 Kvazikonkávní funkce

**Definice.** Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a funkce $f$ je definována na $M$. Řekneme, že $f$ je

- **kvazikonkávní na** $M$, jestliže
  $$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, f(\boldsymbol{b}) \geq f(\boldsymbol{a}) \; \forall t \in \langle 0,1 \rangle : \; f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq f(\boldsymbol{a}),$$
- **ryze kvazikonkávní na** $M$, jestliže
  $$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}, f(\boldsymbol{b}) \geq f(\boldsymbol{a}) \, \forall t \in (0,1) : \; f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > f(a).$$

*Poznámky.* Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a $f$ je funkce definovaná na $M$.

(i) Funkce $f$ je kvazikonkávní na $M$, právě když
$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \, \forall t \in \langle 0,1 \rangle : \; f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\}.$$

(ii) Funkce $f$ je ryze kvazikonkávní na $M$, právě když
$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \; \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \, \forall t \in (0,1) : \; f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\}.$$

(iii) Je-li $f$ konkávní na $M$, pak je i kvazikonkávní na $M$.

(iv) Je-li $f$ ryze konkávní na $M$, pak je i ryze kvazikonkávní na $M$.

**Věta 24** (o jednoznačnosti extrému). *Nechť $f$ je ryze kvazikonkávní funkce na konvexní množině $M \subset \mathbf{R}^n$. Pokud $f$ nabývá na $M$ svého maxima, pak ho nabývá právě v jednom bodě.*

**Důsledek.** *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní, kompaktní a neprázdná množina a $f$ je spojitá a ryze kvazikonkávní funkce na $M$. Pak $f$ nabývá maxima na $M$ právě v jednom bodě.*

**Věta 25** (charakterizace kvazikonkávních funkcí pomocí úrovňových množin). *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a $f$ je funkce definovaná na $M$. Funkce $f$ je kvazikonkávní na $M$ právě tehdy, když pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina*
$$Q_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in M; f(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$$
*konvexní.*

**Věta 26** (charakterizace kvazikonkávních funkcí třídy $C^1$). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Pak funkce $f$ je kvazikonkávní na $G$ právě tehdy, když platí*
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G, \; f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) : \; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i) \geq 0.$$

**Věta 27** (postačující podmínka pro ryzí kvazikonkávnost funkce třídy $C^1$). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$. Jestliže platí*
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G, \; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) : \; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i) > 0,$$
*pak $f$ je ryze kvazikonkávní na $G$.*