

VI.2 Regulární matice a inverzní matice

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je **regulární**, pokud existuje matice $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ je **inverzní maticí** k matici $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, jestliže $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Poznámka.

- (i) Matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární, právě když k ní existuje inverzní matice.
- (ii) Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární matice. Pak existuje právě jedna matice k ní inverzní. Značíme ji \mathbb{A}^{-1} .
- (iii) Jsou-li $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ takové, že $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Věta 4. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ jsou regulární matice. Pak platí:

- (a) \mathbb{A}^{-1} je regulární matice a $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.
- (b) \mathbb{A}^T je regulární matice a $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$.
- (c) $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je regulární matice a $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.

VI.3 Hodnost matice a transformace

Definice. Nechť $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m \in M(1 \times n)$ jsou řádkové vektory délky n .

- **Lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m$ budeme rozumět výraz tvaru $\lambda_1 \mathbf{v}^1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}^m$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou reálná čísla.
- **Triviální lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m$ rozumíme lineární kombinaci $0 \cdot \mathbf{v}^1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}^m$. Lineární kombinaci, která není triviální, nazýváme **netriviální**.
- Řekneme, že vektory $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru.
- Řekneme, že vektory $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m$ jsou **lineárně nezávislé**, nejsou-li lineárně závislé, tj. pokud platí: kdykoli $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou reálná čísla taková, že $\lambda_1 \mathbf{v}^1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}^m = \mathbf{o}$, pak $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. **Hodností** matice \mathbb{A} rozumíme maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků. Hodnost matice \mathbb{A} značíme $h(\mathbb{A})$.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ je **schodovitá**, jestliže pro každé $i \in \{2, \dots, m\}$ její i -tý řádek je buď nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i - 1)$ -ní řádek.

Poznámka. Hodnost schodovité matice je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Definice. Elementárními řádkovými úpravami matice \mathbb{A} rozumíme:

- (1) přehození dvou řádků matice \mathbb{A} (e.ř.ú. prvního druhu);
- (2) vynásobení jednoho řádku matice \mathbb{A} nenulovým číslem (e.ř.ú. druhého druhu);
- (3) přičtení násobku jednoho řádku matice \mathbb{A} k jinému řádku (e.ř.ú. třetího druhu).

Transformací rozumíme konečnou posloupnost elementárních řádkových úprav.

Věta 5 (vlastnosti transformace).

- (i) Každou matici lze vhodnou transformací převést na schodovitou matici.
- (ii) Jestliže lze matici \mathbb{A} převést nějakou transformací na matici \mathbb{B} , pak matici \mathbb{B} lze nějakou transformací převést na matici \mathbb{A} .
- (iii) Jestliže lze matici \mathbb{A} převést nějakou transformací na matici \mathbb{B} , pak $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$.

Poznámka. Analogicky jako řádkové úpravy a transformaci lze definovat **sloupcové úpravy** a **sloupcovou transformaci**. Je snadné dokázat, že sloupcová transformace nemění hodnotu matice. Odtud plyne, že pro každou matici \mathbb{A} platí $h(\mathbb{A}^T) = h(\mathbb{A})$.

Věta 6 (transformace a součin). Necht' $\mathbb{A} \in M(m \times n)$, $\mathbb{B} \in M(n \times k)$, $\mathbb{C} \in M(m \times k)$ splňují $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{C}$. Necht' matice \mathbb{A}' vznikne z matice \mathbb{A} aplikací transformace T a matice \mathbb{C}' vznikne z matice \mathbb{C} aplikací téže transformace T . Pak $\mathbb{A}'\mathbb{B} = \mathbb{C}'$.

Metoda hledání inverzní matice. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární. Pak existuje transformace T , která \mathbb{A} převede na jednotkovou matici. Aplikujeme-li tuto transformaci T na \mathbb{I} , dostaneme \mathbb{A}^{-1} .

Věta 7. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak \mathbb{A} je regulární, právě když $h(\mathbb{A}) = n$.