DĚDIČNĚ BAIREOVY PROSTORY
A VLASTNOST BODU SPOJITOSTI

Ondřej Kalenda

Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Petr HOLICKÝ, CSc.
Katedra matematické analýzy MFF UK
Praha, 1995

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím pouze uvedené literatury. Souhlasím se zapůjčením diplomové práce.

Obsah

ÚVOD A ZNAČENÍ

Budeme se zabývat možnostmi zobecnění klasické Baireovy věty o funkcích první třídy:

Věta A. *Buď X úplný metrický prostor a $f : X \to \mathbb{R}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*
(1) f je bodovou limitou posloupnosti spojitých funkcí,
(2) $f^{-1}(U)$ je F_σ pro každou otevřenou $U \subset \mathbb{R}$,
(3) pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou má restrikce $f \restriction F$ bod spojitosti,
(4) pro každé $\varepsilon > 0$ a pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ existuje $\emptyset \neq U \subset F$ relativně otevřená tak, že $\operatorname{diam} f(U) < \varepsilon$.

Přitom, je-li $f : X \to M$, kde X je topologický a M metrický prostor, pak pokud f splňuje (1), říkáme, že je *první Baireovy třídy*, splňuje-li

(2') $f^{-1}(U)$ je F_σ pro každou otevřenou $U \subset M$,

říkáme, že je *první Borelovy třídy*, splňuje-li (3), řekneme, že má *vlastnost bodu spojitosti* (krátce *PCP*), a pokud splňuje podmínku (4), řekneme, že je *fragmentovaná*. Je zřejmé, že k tomu, aby f byla fragmentovaná, stačí, aby pro $\varepsilon > 0$ a $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou existovala neprázdná relativně otevřená $U \subset F$, že $\operatorname{diam} f(U) < \varepsilon$.

Dalším klasickým výsledkem je:

Věta B. *Je-li X úplný metrický prostor, M separabilní metrický prostor a $f : X \to M$, pak $(2') \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$.*

Ch.Stegall a R.W.Hansell dokázali jiné zobecnění Věty A:

Věta C. *Je-li X úplný metrický prostor a M Banachův prostor a $f : X \to M$, pak $(1) \Leftrightarrow (2') \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$.*

Budeme se zabývat zobecněními Věty B, ve snaze odstranit předpoklady úplnosti a metrizovatelnosti X a separability M. Přitom, uvažujeme-li nemetrizovatelné prostory X, implikace $(3) \Rightarrow (2')$ platit nemusí, protože identifikátor otevřené množiny má zřejmě PCP, ale otevřená množina nemusí být F_σ. Proto je třeba zavést zobecnění pojmu první Borelovy třídy. K tomu poslouží pojem první H-třídy, který (podle [3]) zavedeme v 1. kapitole. Podmínku (2') tak nahradíme podmínkou

(2) f je první H-třídy,*

která v případě, že X je metrický, je ekvivalentní s (2') (Poznámka 1.6). Pak se ukazuje, že (3) $\Rightarrow$(2*) pro každý topologický prostor (Věta 1.3, podle [3]), a že přirozenou náhradou za předpoklad, že X je úplný metrický, je předpoklad, že je *dědičně Baireův* (t.j., každý jeho neprázdný uzavřený podprostor je Baireův) (Tvrzení 1.4).

V 2. kapitole si ukážeme charakterizaci prostorů, pro něž platí (2*)$\Rightarrow$ (3) (které budeme nazývat PCP-prostory) pomocí úplně aditivních systémů, všimneme si, že za axiómu konstruovatelnosti jsou to právě dědičně Baireovy prostory (poznámka za Tvrzením 2.1), uvedeme několik tvrzení o prostorech s vhodnou těsností, pseudováhou nebo charakterem, inspirovaných Větou 2 v [2] (Tvrzení 2.2-2.8), a s využitím důkazu Věty 5.6 v [6] si všimneme, že více lze říci o prostorech se spočetným Suslinovým číslem (Věty 2.11 a 2.12).

V 3. kapitole se budeme zabývat zachováváním platnosti implikace (2*)$\Rightarrow$ (3) na podprostory, součiny a sjednocení.

Ve 4. kapitole definujeme podle [3] třídu dědičně t-Baireových prostorů, obsahující čechovsky úplné prostory, a podle [3] dokážeme například, že za předpokladu neexistence měřitelných kardinálů všechny splňují (2*)$\Rightarrow$ (3).

V 5. kapitole si uědomíme, že za negace hypotézy kontinua lze říci něco víc o slabě α-favorabilních prostorech, uvedeme analogie tvrzení 2. kapitoly, kde podmínky $\leq \aleph_0$ resp. $\leq \aleph_1$ budou nahrazeny podmínkami $< 2^{\aleph_0}$ resp. $\leq 2^{\aleph_0}$.

V 6. kapitole se budeme zabývat souvislostmi platnosti (2*)$\Rightarrow$ (3) s jinými známými otázkami, zkoumanými například v [8], všimneme si, že předpoklad existence dědičně Baireova prostoru, který nesplňuje (2*)$\Rightarrow$ (3) je ekvikonsistentní předpokladu existence měřitelného kardinálu (Poznámka (2) za Tvrzením 6.3).

V 7. kapitole ukážeme několik příkladů dědičně Baireových prostorů, pro které (2*)$\Rightarrow$ (3) neplatí (za předpokladu existence (reálně) měřitelných kardinálů - Příklady 7.1, 7.4 1 7.5) a některé další příklady.

V 8. kapitole se pokusíme soustředit otevřené otázky.

Vlastními výsledky této práce jsou zvláště Věty 2.9, 2.12, 3.8, 5.4, 5.6, dále pak některá tvrzení 6. kapitoly, zvláště Věta 6.3, a jejich použití k modifikaci příkladů v [8] a v [11] (Příklady 7.4, 7.5 a 7.7) a Příklad 7.8.

Děkuji RNDr. Petru Holickému, CSc. za jeho vedení a mnohé podněty v práci.

Nyní zavedeme nějaké značení, které budeme často používat.

Je-li ξ ordinál, označuje totéž ξ i množinu všech ordinálů menších než ξ. Je-li κ kardinál, pak totéž κ značí jemu příslušný ordinál, t.j. nejmenší ordinál, jehož mohutnost je κ.

Je-li X libovolná množina, pak X^ω značí množinu všech posloupností prvků X se součinovou topologií (na X uvažujeme diskrétní topologii,) $X^{<\omega}$ značí množinu všech konečných posloupností prvků X, $\emptyset$ značí prázdnou posloupnost, $l(s)$ délku posloupnosti s. Pro $s \in X^{<\omega}$ a $n \leq l(s)$ a pro $s \in X^\omega$ a $n < \omega$ značí $s \restriction n$ posloupnost tvořenou prvními n prvky posloupnosti s. Pro $s \in X^{<\omega}$ a $t \in X^{<\omega}$ nebo $t \in X^\omega$ píšeme $s \prec t$, pokud existuje n tak, že $s = t \restriction n$. Pro $s \in X^{<\omega}$ a $x \in X$ značí $s^\frown x$ posloupnost, která vznikne z s přidáním prvku x, t.j. pokud $s = (s_0, \ldots, s_n)$, pak $s^\frown x = (s_0, \ldots, s_n, x)$.

Je-li X topologický prostor a $A \subset X$, pak $\operatorname{int} A = \operatorname{int}_X A$ značí vnitřek, $\operatorname{bd} A = \operatorname{bd}_X A$ hranici a $\bar{A} = \bar{A}^X$ uzávěr množiny A v X.

1. H-MNOŽINY, FUNKCE PRVNÍ H-TŘÍDY

V této kapitole zavedeme zobecnění pojmu první Borelovy třídy, podle [3, část 2]. Podmnožina F topologického prostoru X se nazývá *H-množina,* pokud pro každou $A \subset X$ neprázdnou (ekvivalentně neprázdnou uzavřenou) existuje $G \subset A$ neprázdná otevřená v A taková, že $G \subset F$ nebo $G \subset X \setminus F$. Jinými slovy, F je H-množina, právě když její identifikátor má PCP. Množina je H_σ, je-li sjednocením spočetného systému H-množin. Funkce $f : X \to M$ je *první H-třídy*, pokud pro každou $U \subset M$ otevřenou je $f^{-1}(U)$ množina H_σ.

Budeme často používat vlastnosti H-množin, shrnuté v následujícím tvrzení.

Tvrzení 1.1. *(*[3, Tvrzení 2.1]*) Buď X topologický prostor.*

(i) Systém všech H-množin v X je algebra obsahující otevřené množiny.

(ii) Je-li f spojité zobrazení X do topologického prostoru Y, pak pro každou H-množinu Z v Y je $f^{-1}(Z)$ H-množina v X.

(iii) $F \subset X$ je H-množina, právě když pro každou (uzavřenou) $A \subset X$ lze psát $A \cap F = G \cup Z$, kde G je otevřená v A a Z řídká v A.

(iv) Každá H-množina, která má prázdný vnitřek, je řídká.

Důkaz. Nejprve si všimněme, že je-li Z H-množina v X, pak pro každé $A \subset X$ je $A \cap Z$ H-množina v A. Je-li Z H-množina v X a $\operatorname{int} Z = \emptyset$, pak pro libovolnou $\emptyset \neq G \subset X$ otevřenou existuje $\emptyset \neq H \subset G$ otevřená tak, že $H \subset X \setminus Z$, tedy $H \subset X \setminus \bar{Z}$, tedy $X \setminus \bar{Z}$ je hustá v X, tedy Z je řídká a (iv) je dokázáno. Odtud okamžitě plyne, že je-li Z H-množina v X a $A \subset X$ a má-li $A \cap Z$ prázdný vnitřek v A, pak $A \cap Z$ je řídká v A. Dále dokážeme (i). Že otevřené množiny jsou H-množiny a že doplněk H-množiny je H-množina, plyne okamžitě z definice. Zbývá tedy dokázat, že sjednocení dvou H-množin je H-množina. Buďte A, B H-množiny v X, $C \subset X$ libovolná. Pokud $\operatorname{int}_C(C \cap A) \neq \emptyset$, pak toto je neprázdná relativně otevřená podmnožina C obsažená v $A \cup B$. Podobně pokud $\operatorname{int}_C(C \cap B) \neq \emptyset$. Pokud obě množiny jsou prázdné, pak $C \cap (A \cup B)$ je řídká v C, a tedy $\emptyset \neq C \setminus \overline{A \cup B} \subset X \setminus (A \cup B)$. Tedy $A \cup B$ je H-množina.

(ii) Buď Z H-množina v Y, $\emptyset \neq A \subset X$, pak existuje $\emptyset \neq U \subset f(A)$ otevřená v $f(A)$ tak, že $U \subset Z$ nebo $U \subset Y \setminus Z$. Položme $V = A \cap f^{-1}(U)$. Pak V je neprázdná relativně otevřená podmnožina A a platí: $V \subset f^{-1}(Z)$ nebo $V \subset X \setminus f^{-1}(Z)$.

(iii) Buď Z H-množina v X, buď $A \subset X$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $A = X$. Pak $Z = \operatorname{int} Z \cup (Z \setminus \operatorname{int} Z)$, podle (i) jsou obě tyto množiny H-množiny, první je otevřená, druhá je podle (iv) řídká. Obrácená implikace plyne okamžitě z definice. $\square$

Připomeňme, že podmnožina Z topologického prostoru X má *Baireovu vlastnost (BP)*, pokud ji lze psát $Z = G \triangle N$, kde G je otevřená v X a N je první kategorie v X (ekvivalentně $Z = G \cup N$, kde G je G_δ a N je první kategorie). Říkáme, že Z má *Baireovu vlastnost v užším smyslu (BPR)*, pokud pro každou $A \subset X$

(ekvivalentně pro každou $A \subset X$ uzavřenou) má $Z \cap A$ BP v A. Říkáme, že Z má *silnou Baireovu vlastnost (SBP)*, pokud ji lze psát $Z = G \cup N$, kde G je otevřená v X a N je první kategorie v X. Z má *silnou Baireovu vlastnost v užším smyslu (SBPR)*, pokud pro každou (uzavřenou) $A \subset X$ má $Z \cap A$ SBP v A. Z vlastnosti (iii) v předchozím tvrzení plyne, že každá množina H_σ má SBPR.

Ukážeme si jinou charakterizaci H-množin. Říkáme, že rozklad $\mathcal{D}$ topologického prostoru X je *polootevřený*, pokud lze vyjádřit jako transfinitní posloupnost $\mathcal{D}= \{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ tak, že $\bigcup_{\alpha\leq\beta} X_\alpha$ je otevřená v X pro každé $\beta < \kappa$. Snadno vidíme, že je-li $\{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ rozklad topologického prostoru X, pak $\bigcup_{\alpha\leq\beta} X_\alpha$ je otevřená v X pro každé $\beta < \kappa$, právě když $\bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha$ je otevřená v X pro každé $\beta \leq \kappa$, tedy každý prvek polootevřeného rozkladu je rozdílem dvou otevřených množin.

Tvrzení 1.2. *(*[3, Lemma 2.2]*) Podmnožina Z topologického prostoru X je H-množina, právě když existuje $\mathcal{D}$ polotevřený rozklad X tak, že $Z = \bigcup \mathcal{D}'$ pro vhodné $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$.*

Důkaz. Nechť Z je H-množina. Buď X_0 neprázdná otevřená podmnožina X taková, že $X_0 \subset Z$ nebo $X_0 \subset X \setminus Z$. Předpokládejme, že jsme sestrojili neprázdné množiny $X_\alpha, \alpha < \gamma$ tak, že pro každé $\alpha < \gamma$ je buď $X_\alpha \subset Z$ nebo $X_\alpha \subset X \setminus Z$, a $\bigcup_{\alpha\leq\beta} X_\alpha$ je otevřená v X pro každé $\beta < \gamma$. Pokud $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha = X$, konstrukce je skončena, pokud ne, existuje X_γ relativně otevřená neprázdná podmnožina $X \setminus \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ tak, že $X_\gamma \subset Z$ nebo $X_\gamma \subset X \setminus Z$. Pak $\bigcup_{\alpha\leq\gamma} X_\alpha$ je otevřená v X. Protože konstrukce musí skončit, existuje κ tak, že $\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha = X$, pak ovšem $\mathcal{D}= \{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ je hledaný rozklad.

Obráceně, nechť $\mathcal{D}$ je polootevřený rozklad X tak, že $Z = \bigcup \mathcal{D}'$ pro nějaké $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$. Pišme $\mathcal{D}= \{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ tak, že $\bigcup_{\alpha\leq\beta} X_\alpha$ je otevřená v X pro každé $\beta < \kappa$. Buď $\emptyset \neq A \subset X$, buď $\alpha_0 < \kappa$ nejmenší ordinál takový, že $A \cap X_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Pak $A \cap X_{\alpha_0} = A \cap \bigcup_{\alpha\leq\alpha_0} X_\alpha$ je relativně otevřená v A a $A \cap X_{\alpha_0} \subset Z$, pokud $X_{\alpha_0} \in \mathcal{D}'$ a $A \cap X_{\alpha_0} \subset X \setminus Z$, pokud $X_{\alpha_0} \notin \mathcal{D}'$. Tedy Z je H-množina. $\square$

Věta 1.3. *(*[3, Věta 2.3]*) Buď X topologický prostor, M metrický prostor, $f : X \to M$. Pak podmínky*

(a) f má PCP,

(b) f je fragmentovaná,

(c) existuje posloupnost $(\mathcal{D}_n)_{n=1}^\infty$ polootevřených rozkladů X taková, že $\mathcal{D}= \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{D}_n$ tvoří bázi pro f (t.j., pro každou $G \subset M$ otevřenou je $f^{-1}(G)$ sjednocením nějakého podsystému $\mathcal{D}$),

(d) pro každou $A \subset X$ je množina bodů nespojitosti $f \restriction A$ první kategorie v A,

(c') f je první H-třídy,

(d') f je SBPR-měřitelná (t.j., $f^{-1}(G)$ má SBPR pro každou $G \subset M$ otevřenou),

jsou v následujícím vztahu:

$$\begin{array}{ccccccc} (a) & \Rightarrow & (b) & \Rightarrow & (c) & \Rightarrow & (d) \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & & & (c') & \Rightarrow & (d') \end{array}$$

Navíc, je-li X dědičně Baireův, pak $(d) \Rightarrow (a)$ a $(d') \Rightarrow (c')$; je-li M separabilní, platí $(c') \Rightarrow (c)$ a $(d') \Rightarrow (d)$.

Důkaz. $(a) \Rightarrow (b)$ plyne okamžitě z definice spojitosti.

$(b) \Rightarrow (c)$ Pro každou $\emptyset \neq A \subset X$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\emptyset \neq U \subset A$ otevřená v A tak, že $\operatorname{diam} f(U) < \frac{1}{n}$. Tedy podobně jako v důkazu Tvrzení 1.2 sestrojíme pro každé $n \in \mathbb{N}$ polootevřený rozklad $\mathcal{D}_n$ prostoru X tak, že pro každé $D \in \mathcal{D}_n$ je $\operatorname{diam} f(D) < \frac{1}{n}$. Pak $\mathcal{D}=\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ tvoří bázi pro f. Kdykoli totiž $G \subset M$ je otevřená a $x \in f^{-1}(G)$, pak existuje n tak, že G obsahuje $B(f(x), \frac{1}{n})$, existuje $D \in \mathcal{D}_n$, že $x \in D$, a pak $D \subset f^{-1}(G)$.

$(c) \Rightarrow (d)$ Předpokládejme bez újmy na obecnosti $A = X$. Buď $\mathcal{D}= \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ báze pro f, že každé $\mathcal{D}_n$ je polootevřený rozklad X. Označme $U_n = \bigcup\{\operatorname{int} D \mid D \in \mathcal{D}_n\}$. Pak každá U_n je otevřená, ukážeme, že je i hustá v X. Nechť $\mathcal{D}_n = \{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ tak, že $\bigcup_{\alpha \leq \beta} X_\alpha$ je otevřená v X pro každé $\beta < \kappa$. Buď $\emptyset \neq U \subset X$ otevřená, buď $\alpha_0 < \kappa$ nejmenší ordinál takový, že $U \cap X_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Pak $U \cap X_{\alpha_0} = U \cap \bigcup_{\alpha \leq \alpha_0} X_\alpha$ je otevřená, tedy $\emptyset \neq U \cap X_{\alpha_0} = U \cap \operatorname{int}(X_{\alpha_0}) \subset U \cap U_n$. Tedy U_n je hustá v X.

Položme $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Pak $X \setminus C$ je první kategorie. Stačí tedy dokázat, že f je spojitá v každém bodě C. Nechť $x \in C$, nechť G je otevřené okolí $f(x)$ v M. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ a $D \in \mathcal{D}_n$ tak, že $x \in D \subset f^{-1}(G)$. Pak též $x \in \operatorname{int} D \subset f^{-1}(G)$. Tedy f je spojitá v x.

$(c) \Rightarrow (c')$ plyne okamžitě z Tvrzení 1.2.

$(c') \Rightarrow (d')$ plyne z toho, že každá množina H_σ má SBPR.

$(d) \Rightarrow (d')$ Buď $G \subset M$ otevřená, $A \subset X$. Položme $C = f^{-1}(G) \cap A \setminus \operatorname{int}_A(f^{-1}(G) \cap A)$. Pak $f \restriction A$ je nespojitá v každém bodě C, tedy C je první kategorie v A. Tedy $f^{-1}(G)$ má SBPR.

Nyní předpokládejme, že M je separabilní, buď $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spočetná báze M.

$(c') \Rightarrow (c)$ Protože $f^{-1}(V_n)$ je H_σ, existuje podle Tvrzení 1.2 posloupnost $(\mathcal{D}_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ polotevřených rozkladů X taková, že množina $f^{-1}(V_n)$ je sjednocením nějakého podsys- tému $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}_{n,m}$. Pak $\bigcup_{m,n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{n,m}$ je báze pro f.

$(d') \Rightarrow (d)$ Bez újmy na obecnosti předpokládejme $A = X$. Množina bodů nespojitosti f je $\bigcup_{n=1}^{\infty}(f^{-1}(V_n) \setminus \operatorname{int} f^{-1}(V_n))$, což je množina první kategorie.

Pokud X je dědičně Baireův, pak zřejmě $(d) \Rightarrow (a)$.

$(d') \Rightarrow (c')$ Je-li M navíc separabilní, tvrzení plyne z již dokázaných implikací. Není-li separabilní, vezměme libovolnou $G \subset M$ otevřenou, pak existuje spojitá funkce $g : M \to \mathbb{R}$ taková, že $G = g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Splňuje-li f podmínku (d'), splňuje ji i $g \circ f$, a protože $\mathbb{R}$ je separabilní, splňuje $g \circ f$ podmínku (c'). Tedy $f^{-1}(G) = (g \circ f)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ je H_σ. $\square$

Lze dokázat (viz [3, Příklad 2.4]), že žádné jiné implikace obecně neplatí. Budeme zkoumat, kdy platí $(c') \Rightarrow (a)$.

Tvrzení 1.4. *X buď topologický prostor. Pokud $(c') \Rightarrow (a)$ pro každý metrický prostor M a každou $f : X \to M$, pak X je dědičně Baireův.*

Důkaz. Nechť X není dědičně Baireův. Pak existují $\emptyset \neq G \subset F \subset X$, F uzavřená a G otevřená a první kategorie v F. Tedy existují $A_n \subset F, n > 0$ uzavřené řídké v F tak, že $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Položme $H_n = (A_n \setminus \bigcup_{1\leq k\leq n-1} A_k) \cap G$ pro $n > 0$ a $H_0 = X \setminus G$. Pak H_n jsou H-množiny (Tvrzení 1.1.(i)), po dvou disjunktní, jejichž sjednocení je X. Definujme $f : X \to \omega$ předpisem $f(x) = n$, pokud $x \in H_n$. Pak f je první H-třídy, ale $f \restriction \bar{G}$ nemá bod spojitosti. $\square$

Poznámka. Z důkazu předchozího tvrzení plyne dokonce, že pokud $(c') \Rightarrow (a)$ pro každou $f : X \to M$, kde M je separabilní (nebo dokonce spočetný diskrétní prostor), pak již X je dědičně Baireův.

Pro platnost $(c') \Rightarrow (a)$ však nestačí, aby X byl dědičně Baireův, alespoň za předpo- kladu existence (reálně) měřitelného kardinálu (Příklady 7.1, 7.4, 7.5).

Protože budeme často (mlčky) používat několik snadných vlastností množin první kategorie, uvedeme je v následujícím lemmatu.

Lemma 1.5. *(*[5,I,§10, IV]*) Buď X topologický prostor, $E \subset X$.*

(1) Je-li $A \subset E$ první kategorie v E, je A první kategorie v X.

(2) Je-li E hustá nebo otevřená nebo uzávěrem otevřené množiny v X a A první kategorie v X, je $A \cap E$ první kategorie v E.

Poznámka 1.6. *(*podle [6, Lemma 16.2]*) Je-li X metrický prostor, pak každá H-množina v X je F_σ a podmnožina X je H_σ, právě když je F_σ, tedy pojem funkce první H-třídy splývá s pojmem funkce první Borelovy třídy.*

Důkaz. Buď $Z \subset X$ H-množina. Podle Tvrzení 1.2 existuje $\mathcal{D}= \{D_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, že $G_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} D_\beta$ je otevřená pro všechna $\alpha < \kappa$, a množina $A \subset \kappa$, že $Z = \bigcup_{\alpha\in A} D_\alpha$. Pro $\alpha < \kappa$ a $n \geq 1$ položme $Z^n_\alpha = \{x \in D_\alpha \mid d(x, X \setminus G_\alpha) \geq \frac{1}{n}\}$. Pak pro každé n je $(Z^n_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ diskrétní systém uzavřených množin, tedy speciálně sjednocení každého podsystému je uzavřená množina. Tedy $Z^n = \bigcup_{\alpha\in A} Z^n_\alpha$ je uzavřená a $Z = \bigcup_{n\geq1} Z^n$ je F_σ. Tedy i každá H_σ-množina je F_σ. Obráceně, každá uzavřená množina je H-množina, tedy každá F_σ je H_σ. $\square$

Lemma 1.7. *(i) Je-li $\mathcal{D}$ polootevřený rozklad X a $\mathcal{E}$ polootevřený rozklad Y, je $\mathcal{D}\otimes\mathcal{E}= \{D \times E \mid D \in\mathcal{D}, E \in\mathcal{E}\}$ polootevřený rozklad $X \times Y$.*

(ii) Jsou-li $A \subset X, B \subset Y$ H-množiny, je $A \times B$ H-množina v $X \times Y$.

Důkaz. (i) Nechť $\mathcal{D}= \{D_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$,$\mathcal{E}= \{E_\alpha \mid \alpha < \tau\}$, aby $\bigcup_{\beta\leq\alpha} D_\beta$ pro $\alpha < \kappa$ a $\bigcup_{\beta\leq\alpha} E_\beta$ pro $\alpha < \tau$ byly otevřené množiny v X resp. v Y. Na $\kappa \times \tau$ uvažujme lexikografické uspořádání. Nechť $\gamma < \kappa, \delta < \tau$. Pak

$$\bigcup_{(\alpha,\beta)\leq(\gamma,\delta)} D_\alpha \times E_\beta = ((\bigcup_{\alpha<\gamma} D_\alpha) \times Y) \cup ((\bigcup_{\alpha\leq\gamma} D_\gamma) \times (\bigcup_{\beta\leq\delta} E_\beta)),$$

což je otevřená množina v $X \times Y$.

(ii) plyne ihned z (i) a z Tvrzení 1.2. $\square$

Jsou-li $f : X \to M$, $g : Y \to P$ dvě funkce, pak symbolem $f \times g$ značíme funkci $X \times Y \to M \times P$ definovanou předpisem $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ pro $(x, y) \in X \times Y$.

Tvrzení 1.8. *Buďte X,Y topologické prostory, M,P metrické prostory, $f : X \to M, g : Y \to P$.*

(i) Pokud f, g splňují podmínku (c) Věty 1.3, splňuje ji i $f \times g$.

(ii) Mají-li f, g PCP, je $f \times g$ první H-třídy.

(iii) Je-li $X \times Y$ dědičně Baireův, pak $f \times g$ má PCP, právě když f i g mají PCP.

Důkaz. (i) Nechť $\mathcal{D}= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_n$,$\mathcal{E}= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{E}_n$ jsou báze pro f resp. g, kde $\mathcal{D}_n$,$\mathcal{E}_n, n \in \mathbb{N}$ jsou polotevřené rozklady X resp. Y. Pak $\bigcup_{n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_n\otimes\mathcal{E}_m$ je báze pro $f \times g$.

(ii) a implikace „$\Leftarrow$ " v (iii) plynou ihned z (i) a Věty 1.3. Obrácená implikace v (iii) plyne ze snadného pozorování, že je-li (x, y) bodem spojitosti $(f \times g) \restriction F \times Y$, je x bodem spojitosti $f \restriction F$. $\square$

Poznámka 1.9. *(i) Má-li $A \subset X$ SBP v $\bar{A}$ a je-li A Baireův prostor, pak lze psát $A = G \cup N$, kde G je otevřená a N řídká v X.*

(ii) Má-li $A \subset X$ SBPR a je-li A dědičně Baireův prostor, pak A je H-množina.

Důkaz. (i) Má-li A SBP v $\bar{A}$, lze psát $A = H \cup P$, kde H je otevřená v $\bar{A}$ a P první kategorie v $\bar{A}$. Tedy P je první kategorie i v A, tedy (A je Baireův) má v A prázdný vnitřek, tedy H je hustá v A, tedy i v $\bar{A}$. Tedy P je řídká v $\bar{A}$, a tedy i v X. Dále H je H-množina (jako průnik otevřené a uzavřené množiny), tedy lze psát $H = G \cup L$, kde G je otevřená a L řídká v X. Položme $N = P \cup L$, pak N je řídká a $A = G \cup N$.

(ii) Buď $F \subset X$ uzavřená. Pak podle (i) $F \cap A = G \cup N$, kde G je otevřená a N řídká v F, tedy podle Tvrzení 1.1 je A H-množina. $\square$

Poznámka 1.10. *Je-li X dědičně Baireův a $A \subset X$ taková, že A i $X \setminus A$ mají SBPR, pak A je H-množina.*

Důkaz. Podle Věty 1.3 má identifikátor množiny A PCP, tedy podle definice je A H-množina. (Toto lze dokázat i přímo s použitím Tvrzení 1.1.(iii).) $\square$

2. PCP-PROSTORY A ÚPLNÁ ADITIVITA

Je-li X množina a $\mathcal{A}$ nějaký systém podmnožin X, pak systém $\mathcal{S}$ podmnožin X nazveme *úplně $\mathcal{A}$-aditivní*, pokud pro každé $\mathcal{T}\subset\mathcal{S}$ je $\bigcup\mathcal{T}\in\mathcal{A}$. Protože se budeme zabývat jen disjunktními úplně aditivními systémy, budeme vždy slovy *úplně aditivní* rozumět *disjunktní úplně aditivní.* Je-li κ nekonečný kardinál, řekneme, že topologický prostor X má *vlastnost* (H_κ) resp. (S_κ), pokud sjednocení každého úplně H_σ- resp. SBPR-aditivního systému množin první kategorie v X, jehož mohutnost je nejvýš κ, má prázdný vnitřek. Řekneme, že X má *vlastnost (H) resp. (S)*, má-li vlastnost (H_κ) resp. (S_κ) pro každý kardinál κ. Pro X topologický prostor značíme $d(X)$ jeho *hustotu*, t.j. nejmenší mohutnost husté podmnožiny v X. X nazveme *κ-PCP-prostorem*, pokud každé zobrazení prostoru X do metrického prostoru s hustotou nejvýš κ, které je první H-třídy, má PCP. X nazveme *PCP-prostorem*, je-li κ-PCP-prostorem pro každé κ. Tvrzení 1.4 pak vlastně říká, že každý PCP-prostor (podle poznámky za zmíněným tvrzením dokonce každý ω-PCP-prostor) je dědičně Baireův. Naopak, z Věty 1.3 plyne, že každý dědičně Baireův prostor je ω-PCP-prostor.

Tvrzení 2.1. *Buď X topologický prostor, κ nekonečný kardinál. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) X je κ-PCP-prostor,

(ii) každý neprázdný uzavřený podprostor X má vlastnost (H_κ),

(iii) každý neprázdný uzavřený podprostor X má vlastnost (S_κ),

(iv) je-li M diskrétní metrický prostor mohutnosti κ, pak každá $f : X \to M$ první H-třídy má PCP.

Poznámka. Z [8, Věta 7G] plyne, že za axiómu konstruovatelnosti každý Baireův prostor má vlastnost (S), a tedy každý dědičně Baireův prostor je PCP-prostor. Citovaná věta říká formálně víc, více se tím budeme zabývat v 6. kapitole.

Důkaz. $(iii) \Rightarrow (ii)$ plyne z toho, že každá H_σ-množina má SBPR.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Nechť (ii) je splněno. Pak zřejmě X je dědičně Baireův. Buď M metrický prostor, pro nějž $d(M) \leq \kappa$, $\mathcal{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}_n$ buď jeho otevřená báze taková, že $\mathcal{B}_n$ je disjunktní systém pro každé n. Pak ovšem pro každé n je card$\mathcal{B}_n \leq \kappa$. Buď $f : X \to M$ funkce první H-třídy. Pro každé $B \in\mathcal{B}$ lze psát $f^{-1}(B) = G_B \cup E_B$, kde G_B je otevřená a E_B první kategorie v X. Pak $\mathcal{E}_n = \{E_B \mid B \in\mathcal{B}_n\}$ je pro každé n úplně H_σ-aditivní systém množin první kategorie v X, jehož mohutnost je nejvýš κ, tedy $\bigcup\mathcal{E}_n$ má prázdný vnitřek, a tedy je první kategorie pro každé n, tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup\mathcal{E}_n$ je první kategorie, a tedy má prázdný vnitřek (protože X je Baireův), ale v každém bodě doplňku této množiny (který je neprázdný, protože je hustý) je f spojitá. Stejný argument lze opakovat pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou, tedy f má PCP.

$(i) \Rightarrow (iv)$ je zřejmé.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Nechť platí (iv). Z poznámky za Tvrzením 1.4 plyne, že X je dědičně Baireův. Buď $\mathcal{E}$ úplně SBPR-aditivní systém množin první kategorie v F, jehož mohutnost je nejvýš κ a jehož sjednocení má neprázdný vnitřek v F, kde $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřená. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $F = X$. Položme $G = \operatorname{int} \bigcup \mathcal{E} \neq \emptyset$. Můžeme předpokládat $G = \bigcup \mathcal{E}$. Pak podle Poznámky 1.10 a díky tomu, že G je dědičně Baireův, je $\mathcal{E}$ dokonce úplně H-aditivní. Položme $M = \mathcal{E} \cup \{X \setminus G\}$ s diskrétní metrikou a $f : X \to M$ definujme předpisem $f(x) = E$, pokud $x \in E$. Pak f je první H-třídy, ale $f \restriction \bar{G}$ nemá bod spojitosti. □

Protože zřejmě X má vlastnost (H_ω), právě když je Baireův, plyne z předchozího tvrzení opět, že X je ω-PCP-prostor, právě když je dědičně Baireův, jak jsme si uvědomili výše za pomoci tvrzení 1. kapitoly. Otázku, zda dědičně Baireovy prostory jsou PCP-prostory, lze tedy formulovat, zda ω-PCP-prostory jsou PCP-prostory. O tom, že tomu tak být nemusí, svědčí Příklady v 7. kapitole. V dalším ukážeme, že za určitých podmínek (na těsnost, charakter,...) z toho, že X je κ-PCP-prostor pro vhodné κ plyne již, že je PCP-prostor. Pro některé třídy prostorů (prostory se spočetnou těsností, s charakterem $\aleph_1$,...) pak bude stačit předpoklad, že jsou ω-PCP-prostory, t.j. dědičně Baireovy.

Říkáme, že topologický prostor X má *těsnost* τ, pokud τ je nejmenší kardinál, pro který platí:

$$(\forall A \subset X)(\forall x \in \bar{A})(\exists B \subset A)(x \in \bar{B} \ \& \ \operatorname{card} B \leq \tau).$$

Tvrzení 2.2. (podle [2]) *Nechť X je topologický prostor s těsností nejvýš τ, kde $\tau \geq \aleph_0$. Je-li X τ-PCP-prostor, je X PCP-prostor.*

Důkaz. Nechť X je τ-PCP-prostor, ale ne PCP-prostor. Pak zřejmě X je dědičně Baireův a podle Tvrzení 2.1 existuje $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřená, která nemá vlastnost (S). Bez újmy na obecnosti předpokládejme $F = X$. Buď $\mathcal{E}$ úplně SBPR-aditvní systém množin první kategorie v X, jehož sjednocení má neprázdný vnitřek v X. Pak tedy existuje $G \subset \bigcup \mathcal{E}$ neprázdná otevřená v X. Pro $s \in \tau^{<\omega}$ sestrojíme $c_s \in G$ a $E_s \in \mathcal{E}$ tak, aby platilo pro každé $s \in \tau^{<\omega}$:

(a) $c_s \in E_s$

(b) $c_s \in \overline{\{c_{s^\frown n} \mid n < \tau\}}$

(c) $c_s \notin \bigcup \{E_t \mid l(t) < l(s)\}$

$c_\emptyset \in G$ zvolme libovolně, $E_\emptyset \in \mathcal{E}$ tak, že $c_\emptyset \in E_\emptyset$. Dále nechť $m \geq 0$ a nechť $c_s, E_s, l(s) \leq m$ splňují (a), (b), (c). Systém $\{E_t \cap G \mid l(t) \leq m\}$ je úplně SBPR-aditivní systém množin první kategorie v X, jeho mohutnost je nejvýš τ, tedy, protože X má vlastnost (S_τ), jeho sjednocení má prázdný vnitřek v X, tedy i v G, a tedy množina $A = \bigcup \{E \cap G \mid E \in \mathcal{E}, E \notin \{E_t \mid l(t) \leq m\}\}$ je hustá v G. Tedy speciálně $c_s \in \bar{A}$ pro každé $s \in \tau^{<\omega}, l(s) = m$. Tedy existují $c_{s^\frown n} \in A, n < \tau$, že $c_s \in \overline{\{c_{s^\frown n} \mid n < \tau\}}$. Zvolme $E_{s^\frown n}$ tak, aby $c_{s^\frown n} \in E_{s^\frown n}$. Takto zkonstruované $c_t, E_t, l(t) \leq m+1$ opět splňují (a), (b), (c).

Položme $C_1 = \{c_s \mid l(s) \text{ sudá}\}$, $C_2 = \{c_s \mid l(s) \text{ lichá}\}$, pak $H = \bar{C}_1 \cap G = \bar{C}_2 \cap G$ je Baireův prostor. Systém $\mathcal{E}_H = \{E \cap H \mid E \in \mathcal{E}\}$ je úplně SBPR-aditivní v H. Položíme-li $H_1 = \bigcup \{E_s \cap H \mid l(s) \text{ sudá}\}$, $H_2 = \bigcup \{E \cap H \mid E \in \mathcal{E}, E \notin \{E_s \mid l(s) \text{ sudá}\}\}$, pak tedy H_1, H_2 mají SBP v H, jsou husté v H (protože $C_i \subset H_i, i = 1, 2$), jsou disjunktní, tedy mají prázdný vnitřek v H, tedy jsou první kategorie v H, tedy $H = H_1 \cup H_2$ je první kategorie v sobě, což je spor. □

Okamžitým důsledkem je:

Věta 2.3. *Je-li X dědičně Baireův prostor s (nejvýš) spočetnou těsností, pak X je PCP-prostor. Speciálně dědičně Baireovy metrické prostory, dědičně Baireovy podprostory $(\mathcal{C}(K), \tau_P)$, prostoru spojitých funkcí na kompaktním Hausdorffově prostoru s topologií bodové konvergence, dědičně Baireovy podprostory Banachova prostoru se slabou topologií, jsou PCP-prostory.*

Pseudobází topologického prostoru X rozumíme systém neprázdných otevřených podmnožin X takový, že každá neprázdná otevřená podmnožina X obsahuje prvek tohoto systému. Nejmenší možnou mohutnost pseudobáze nazveme *pseudováhou* prostoru X, značíme $\pi w(X)$.

Dále budeme používat následující značení: Je-li $\mathcal{E}$ disjunktní systém množin, pak pro $x \in \bigcup\mathcal{E}$ značme E_x ten prvek $\mathcal{E}$, který obsahuje x.

Tvrzení 2.4. *Buď $\kappa > \aleph_0$, $\pi w(X) \leq \kappa$. Pokud X má vlastnost (S_α) pro každé $\alpha < \kappa$, má vlastnost (S).*

Poznámka. Analogické tvrzení (se stejným důkazem) platí i pro vlastnost (H_α) resp. (H).

Důkaz. Buď $\mathcal{B}$ pseudobáze mohutnosti nejvýš κ. Buď $\mathcal{E}$ úplně SBPR-aditivní systém množin první kategorie takový, že $G = \operatorname{int}\bigcup\mathcal{E} \neq \emptyset$. Buď $\{B_\xi \mid \xi < \tau\} = \{B \in\mathcal{B} | B \subset G\}$, kde $\tau \leq \kappa$. Pro $\alpha < \tau$ sestrojíme indukcí $x_\alpha, y_\alpha \in B_\alpha$ tak, aby $x_\alpha, y_\alpha \notin \bigcup_{\xi<\alpha}(E_{x_\xi} \cup E_{y_\xi})$ a navíc $E_{x_\alpha} \neq E_{y_\alpha}$, což lze díky tomu, že X má vlastnost (S_β) pro $\beta < \tau$. Položme $A = \{x_\xi \mid \xi < \tau\}, B = \{y_\xi \mid \xi < \tau\}$. Pak $\bar{A} = \bar{B} \supset G$, neboť pro $\emptyset \neq H \subset G$ otevřenou existuje $\alpha < \tau$, že $B_\alpha \subset H$, tedy $H \cap A \neq \emptyset \neq H \cap B$. Položme $H_1 = \bigcup\{E_x \cap G \mid x \in A\}, H_2 = G \setminus H_1$. Pak H_1, H_2 jsou husté v G, disjunktní, tedy mají prázdný vnitřek, tedy jsou první kategorie (neboť mají SBPR), tedy G je první kategorie v sobě, což je spor, neboť X je Baireův prostor. □

Okamžitým důsledkem předchozího tvrzení je:

Věta 2.5. *(i) Je-li X Baireův prostor a $\pi w(X) \leq \aleph_1$, pak X má vlastnost (S).*

(ii) Je-li X dědičně Baireův a pro každý jeho neprázdný uzavřený podprostor F platí $\pi w(F) \leq \aleph_1$, pak X je PCP-prostor.

Každý ordinál ξ lze psát jednoznačně ve tvaru $\xi = \alpha + n$, kde α je limitní nebo 0 a $n < \omega$. Ordinál ξ nazveme *sudým* resp. *lichým ordinálem*, je-li n sudé resp. liché. Pro $s = (s_0, ..., s_n)$ konečnou posloupnost ordinálů položme $p(s) = \min\{i \mid -1 \leq i \leq n, s_j$ je izolovaný pro $i < j \leq n\}$, $q(s) = s_0 + ... + s_n + (n - p(s))$ pro $s \neq \emptyset, q(\emptyset) = 0$.

Tvrzení 2.6. *Buď $\kappa > \aleph_0$, X topologický prostor, jehož charakter $\chi(X) \leq \kappa$. Je-li X τ-PCP-prostor pro každé $\tau < \kappa$, je X PCP-prostor.*

Důkaz. Nechť X je τ-PCP-prostor pro každé $\tau < \kappa$, ale není PCP-prostor. Pak existuje $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřená, která nemá vlastnost (S). Bez újmy na obecnosti předpokládejme $F = X$. Buď $\mathcal{E}$ úplně SBPR-aditivní systém množin první kategorie, pro nějž $G = \operatorname{int}\bigcup\mathcal{E} \neq \emptyset$. Pro každé $x \in X$ buďte $(V_\alpha^x)_{\alpha<\kappa}$ otevřené množiny takové, že $\{V_\alpha^x \mid \alpha < \kappa, \alpha \text{ sudé}\}$ i $\{V_\alpha^x \mid \alpha < \kappa, \alpha \text{ liché}\}$ tvoří bázi okolí bodu x. Pro $s \in \kappa^{<\omega}$ sestrojíme $c_s \in G$ splňující:

(*i*) $c_{s^\frown\xi} \in V_\xi^{c_s}$, (*ii*) $c_s \notin \bigcup\{E_{c_t} \mid q(t) \leq q(s), t \neq s\}$.

$c_\emptyset \in G$ zvolme libovolně. Nechť $0 < \alpha < \kappa$ a pro $q(s) < \alpha$ již máme c_s, které splňují (i), (ii). Položme $A = \bigcup\{E_{c_t} \mid q(t) < q(s)\}$. Pak $A \cap G$ má prázdný vnitřek a je první kategorie v G, tedy $G \setminus A$ je hustá v G. Pro $q(s) = \alpha$, kde $s = t^\frown\xi$ a $\xi < \kappa$ zvolme $c_s \in V_\xi^{c_t} \cap (G \setminus A)$. Protože $\operatorname{card}\{s \in \kappa^{<\omega} \mid q(s) = \alpha\} < \kappa$, lze $c_s, q(s) = \alpha$ volit navíc tak, aby $E_{c_s} \neq E_{c_t}$ pro $s \neq t$. Tím je konstrukce provedena. Z (i) a (ii) plyne, že $E_{c_s} \neq E_{c_t}$ pro $s, t \in \kappa^{<\omega}$, $s \neq t$. Položme $C_0 = \{c_{s^\frown\xi} \mid s \in \kappa^{<\omega}, \xi < \kappa, \xi$ sudé$\}$, $C_1 = \{c_{s^\frown\xi} \mid s \in \kappa^{<\omega}, \xi < \kappa, \xi$ liché$\}$. Položme $H = \bar{C}_0 \cap G = \bar{C}_1 \cap G$, $H_0 = \bigcup\{H \cap E_c \mid c \in C_0\}$, $H_1 = H \setminus H_0$. Pak H_0, H_1 jsou disjunktní a husté v H, tedy mají prázdný vnitřek, tedy jsou první kategorie v H, tedy H je první kategorie v sobě, což je spor, neboť H je Baireův prostor. $\square$

Z předchozího tvrzení okamžitě plyne:

Věta 2.7. *Je-li X dědičně Baireův prostor a $\chi(X) \leq \aleph_1$, je X PCP-prostor.*

Dále dokážeme zobecnění Tvrzení 2.2, k čemuž zavedeme (poněkud umělý) pojem *silné těsnosti.* X má silnou těsnost κ, pokud κ je nejmenší kardinál, pro nějž platí:

$$(\forall A \subset X)(\forall x \in \bar{A})(\exists B \subset A)(x \in \bar{B} \;\&\; (\operatorname{card} B < \kappa \text{ nebo}$$
$$(\operatorname{card} B = \kappa \;\&(\forall C \subset B)(\operatorname{card} C = \kappa \Rightarrow x \in \bar{C})))).$$

Tedy, silná těsnost κ znamená, že kdykoli $x \in \bar{A}$, pak buď existuje $B \subset A$ mohutnosti $< \kappa$ tak, že $x \in \bar{B}$, nebo je x limitou dobře uspořádaného netu (indexovaného ordinály $< \kappa$) prvků množiny A. Vidíme, že druhá možnost dává něco nového, jen je-li κ regulární (připomeňme, že kardinál κ je *regulární*, pokud je větší než $\aleph_0$ a není kofinální s žádným menším ordinálem (t.j., je-li $\alpha < \kappa$ ordinál a $\beta_\xi < \kappa$ pro $\xi < \alpha$, pak $\sup_{\xi<\alpha} \beta_\xi < \kappa$)).

Tvrzení 2.8. *Buď κ regulární kardinál a X topologický prostor silné těsnosti nejvýš κ. Je-li X τ-PCP-prostor pro všechna $\tau < \kappa$, je X PCP-prostor.*

Poznámka. Protože, když X má těsnost $\leq \tau$, pak má silnou těsnost $\leq \tau^+$, kde τ^+ značí následníka kardinálu τ, je Tvrzení 2.2 důsledkem tohoto tvrzení, avšak jeho přímý důkaz je značně jednodušší. Navíc podmínka na těsnost se zdá přirozenější než na silnou těsnost, a proto budeme vždy tvrzení o prostorech s jistou těsností uvádět zvlášť, třebaže budou důsledky tvrzení o prostorech s větší silnou těsností.

Důkaz. Nechť X je τ-PCP-prostor pro každé $\tau < \kappa$, ale není PCP-prostor. Pak existuje $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřená, která nemá vlastnost (S). Bez újmy na obecnosti předpokládejme $F = X$. Buď $\mathcal{E}$ úplně SBPR-aditivní systém množin první kategorie, pro nějž $G = \operatorname{int} \bigcup \mathcal{E} \neq \emptyset$. Pro $\xi < \kappa$ zkonstruujeme po dvou disjunktní množiny $A_\xi \subset \kappa^{<\omega}$, pro $s \in B = \bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi$ pak $x_s \in G, c_s \in G, \alpha_s \leq \kappa$ kardinál tak, aby:

(*a*) $s^\frown\xi \in B \Leftrightarrow (s \in B \;\&\; \xi < \alpha_s)$,

(*b*) $A_0 = \{\emptyset\}$,

(*c*) $c_s \in \overline{\{x_{s^\frown\xi} \mid \xi < \alpha_s \text{ sudé}\}} \cap \overline{\{x_{s^\frown\xi} \mid \xi < \alpha_s \text{ liché}\}}$,

(*d*) $\alpha_s = \kappa \Rightarrow (\forall D \subset \kappa)(\operatorname{card} D = \kappa \Rightarrow c_s \in \overline{\{x_{s^\frown\xi} \mid \xi \in D\}})$,

(e) $\operatorname{card}\mathcal{E}_s < \kappa \Rightarrow c_{s^\frown\xi} = x_{s^\frown\xi}$ pro $\xi < \alpha_s$,

(f) $\operatorname{card}\mathcal{E}_s = \kappa \Rightarrow \{E_{x_{s^\frown\xi}} \mid \xi < \kappa \text{ sudé}\} \cap \{E_{x_{s^\frown\xi}} \mid \xi < \kappa \text{ liché}\} = \emptyset$ & $(c_{s^\frown\xi} = x_{s^\frown\eta_\xi}$, kde $(\eta_\xi)_{\xi<\kappa}$ je rostoucí a kofinální a η_ξ má stejnou paritu jako $\xi)$,

(g) $x_{s^\frown\xi} \notin \bigcup_{\eta\leq q(s)} F_\eta$,

(h) F_ξ má prázdný vnitřek,

(i) $c_s \notin \bigcup_{\eta<\xi} F_\eta$ pro $s \in A_\xi$,

(j) $\operatorname{card}\mathcal{E}_s < \kappa \Leftrightarrow \{s^\frown\xi \mid \xi < \alpha_s\} \subset A_{q(s^\frown 0)}$,

kde $F_\xi = \bigcup\{E_{c_s} \mid s \in A_\xi\}$, $\mathcal{E}_s = \{E_{x_{s^\frown\xi}} \mid \xi < \alpha_s\}$.

Zvolme $c_\emptyset = x_\emptyset \in G$ libovolně, položme $A_0 = \{\emptyset\}$. Dále nechť $0 < \alpha < \kappa$ a nechť $A_\xi, \xi < \alpha$; $c_s, s \in \bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi$; $\alpha_s, s \in \bigcup_{\xi+1<\alpha} A_\xi$; $x_{s^\frown\eta}, s \in \bigcup_{\xi+1<\alpha} A_\xi, \eta < \alpha_s$ splňují (b)-(j). Položme $F = \bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi$. Pak $G \setminus F$ je hustá v G.

(1) Nechť $\alpha = \beta + 1$. Položme $D = \{s \in \bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi \mid q(s) = \beta\}$. Pro $s \in D$ sestrojím $\alpha_s \leq \kappa$ a $x_{s^\frown\xi} \in G \setminus F, \xi < \alpha_s$, aby bylo splněno (c)-(f), což lze díky podmínce na silnou těsnost X a tomu, že $G \setminus F$ je hustá v G. Tím je splněna i podmínka (g). Položme $A^0_\alpha = \{s^\frown 0 \mid s \in D\} \cup \{s^\frown\xi \mid s \in D, \operatorname{card}\mathcal{E}_s < \kappa, \xi < \alpha_s\}$, pro $t \in A^0_\alpha$ položme $c_t = x_t$.

Dále položme $A^1_\alpha = \{s^\frown(\xi+1) \mid s^\frown\xi \in D, s^\frown(\xi+1) \notin \bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\}$. Nechť $s^\frown(\xi + 1) \in A^1_\alpha$. Pak nutně $\operatorname{card}\mathcal{E}_s = \kappa$. Tedy $(c_{s^\frown\eta})_{\eta\leq\xi} = (x_{s^\frown\gamma_\eta})_{\eta\leq\xi}$, kde $(\gamma_\eta)_{\eta\leq\xi}$ je rostoucí. Buď $\zeta > \gamma_\xi$ nejmenší, které má stejnou paritu jako $\xi + 1$ a pro něž platí $x_{s^\frown\zeta} \in G \setminus F$, což lze, neboť $\operatorname{card}\bigcup_{\eta<\alpha} A_\eta < \kappa = \operatorname{card}\mathcal{E}_s$. Položme $c_{s^\frown(\xi+1)} = x_{s^\frown\zeta}$ a $A_\alpha = A^0_\alpha \cup A^1_\alpha$, a opět je splněno (b)-(j).

(2) Nechť α je limitní. Položme $A_\alpha = \{s^\frown\xi \mid q(s^\frown\xi) = \alpha, s^\frown\xi \notin \bigcup_{\eta<\alpha} A_\eta, s^\frown\zeta \in \bigcup_{\eta<\alpha} A_\eta \text{ pro } \zeta < \xi\}$. Nechť $s^\frown\xi \in A_\alpha$. Pak nutně $\operatorname{card}\mathcal{E}_s = \kappa$. Tedy $(c_{s^\frown\eta})_{\eta<\xi} = (x_{s^\frown\gamma_\eta})_{\eta<\xi}$, kde $(\gamma_\eta)_{\eta<\xi}$ je rostoucí. Buď $\zeta \geq \sup_{\eta<\xi} \gamma_\eta$ nejmenší, které má stejnou paritu jako ξ (t.j. je sudé, neboť ξ je limitní) a pro něž platí $x_{s^\frown\zeta} \in G \setminus F$, což lze, neboť $\operatorname{card}\bigcup_{\eta<\alpha} A_\eta < \kappa = \operatorname{card}\mathcal{E}_s$. Položme $c_{s^\frown\xi} = x_{s^\frown\zeta}$, a opět je splněno (b)-(j).

Tím je konstrukce provedena a (a) je splněno též. Položme $C_0 = \{c_s \mid s \in A_\xi, \xi < \kappa \text{ sudé}\}$, $C_1 = \{c_s \mid s \in A_\xi, \xi < \kappa \text{ liché}\}$. Pak $\overline{\{E_c \mid c \in C_0\}} \cap \overline{\{E_c \mid c \in C_1\}} = \emptyset$. Navíc $\bar{C}_0 = \bar{C}_1$: Je-li $s \in B$, pak $c_s \in \overline{\{c_{s^\frown\xi} \mid \xi < \alpha_s\}}$. Pokud $\operatorname{card}\mathcal{E}_s < \kappa$, pak podle (j) je $c_s \in \bar{C}_\varepsilon$, kde ε je parita $q(s^\frown 0)$. Pokud $\operatorname{card}\mathcal{E}_s = \kappa$, pak $c_s \in \overline{\{c_{s^\frown\xi} \mid \xi < \alpha_s \text{ sudé}\}} \cap \overline{\{c_{s^\frown\xi} \mid \xi < \alpha_s \text{ liché}\}}$, tedy $c_s \in \bar{C}_0 \cap \bar{C}_1$. V obou případech je $c_s \in \bar{C}_\varepsilon$, kde ε je parita $q(s^\frown 0)$. Tedy $c_{s^\frown\xi} \in \bar{C}_\varepsilon$ pro $\xi < \alpha_s$ liché, $c_{s^\frown\xi} \in \bar{C}_{1-\varepsilon}$ pro $\xi < \alpha_s$ liché. Tedy podle (c) je $c_s \in \bar{C}_0 \cap \bar{C}_1$, tedy $\bar{C}_0 = \bar{C}_1$.

Položme $H = G \cap \bar{C}_0 = G \cap \bar{C}_1$, $H_0 = \bigcup\{E_c \mid c \in C_0\}$, $H_1 = H \setminus H_0$. Pak H_0, H_1 jsou disjunktní husté v H, mají SBPR, tedy jsou první kategorie v H, tedy H je první kategorie v sobě, což je spor, neboť H je Baireův prostor. $\square$

Z předchozího tvrzení okamžitě dostáváme:

Věta 2.9. *Je-li X dědičně Baireův prostor se silnou těsností nejvýš $\aleph_1$, pak X je PCP-prostor.*

Je-li X topologický prostor, pak jeho *Suslinovým číslem* rozumíme

$$c(X) = \sup\{\operatorname{card}\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ je disjunktní systém neprázdných otevřených podmnožin } X\}.$$

Kardinál κ nazveme *slabě nedosažitelným*, je-li regulární a není následníkem žádného kardinálu. Snadno si uvědomíme, že κ je slabě nedosažitelný, právě když je regulární a $\operatorname{card}\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ je kardinál}\} = \kappa$.

Lemma 2.10. *Buď X prostor, který má vlastnost (S_α) pro $\alpha < \kappa$, ale nemá vlastnost (S_κ). Buď $\mathcal{E} = \{E_\xi \mid \xi < \kappa\}$ úplně SBPR-aditivní systém množin první kategorie, jehož sjednocení má neprázdný vnitřek. Pak*

(i) Je-li $\alpha < \kappa$ ordinál a $\mathcal{E}_\xi \subset \mathcal{E}$ pro $\xi < \alpha$ tak, že $\bigcup \mathcal{E}_\xi$ je první kategorie pro každé $\xi < \alpha$, pak $\bigcup_{\xi<\alpha} \bigcup \mathcal{E}_\xi$ má prázdný vnitřek.

(ii) κ je regulární.

(iii) Pokud κ není slabě nedosažitelný, pak existují $\mathcal{E}_\alpha, \alpha < \kappa$ po dvou disjunktní podsystémy $\mathcal{E}$ takové, že sjednocení každého z nich má neprázdný vnitřek, speciálně $\kappa \le c(X)$.

Důkaz. (i) Pro $\xi < \alpha$ položme $A_\xi = \bigcup(\mathcal{E}_\xi \setminus \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{E}_\eta)$. Pak $\{A_\xi \mid \xi < \alpha\}$ je úplně SBPR-aditivní systém množin první kategorie, jehož mohutnost je menší než κ, tedy jeho sjednocení má prázdný vnitřek. A toto sjednocení je přesně rovno $\bigcup_{\xi<\alpha} \bigcup \mathcal{E}_\xi$.

(ii) Nechť $\alpha < \kappa$ je kofinální s κ. Pak existují $\beta_\xi, \xi < \alpha$ tak, že $\beta_\xi < \kappa$ pro $\xi < \alpha$ a $\sup_{\xi<\alpha} \beta_\xi = \kappa$. Položme $\mathcal{E}_{\ \xi} = \{E_\eta \mid \eta < \beta_\xi\}$ pro $\xi < \alpha$. Pak $\bigcup \mathcal{E}_\xi$ má prázdný vnitřek (neboť X má vlastnost (S_{β_ξ})), a tedy je první kategorie. Tedy podle (i) má $\bigcup \mathcal{E} = \bigcup_{\xi<\alpha} \bigcup \mathcal{E}_\xi$ prázdný vnitřek, což je spor.

(iii) K důkazu (iii) použijeme metodu Ulamova důkazu, že $\aleph_1$ není reálně měřitelný ([6, Věta 5.6]).

Nechť κ není slabě nedosažitelný, ale neplatí tvrzení (iii). Pak (protože je regulární) je následníkem nějakého kardinálu, označme jej ζ. Pro $\beta < \kappa$ buď $\alpha \mapsto f(\alpha, \beta)$ prosté zobrazení β do ζ. Pak zřejmě

(*) $$\alpha < \beta < \gamma < \kappa \Rightarrow f(\alpha, \gamma) \neq f(\beta, \gamma).$$

Pro $\alpha < \kappa, \xi < \zeta$ označme $F_\alpha^\xi = \{\beta > \alpha \mid f(\alpha, \beta) = \xi\}$. Pak

(**) $$F_\alpha^\xi, \alpha < \kappa \text{ jsou disjunktní pro každé } \xi < \zeta,$$

což plyne okamžitě z (*). Dále

(***) $$\kappa \setminus \bigcup_{\xi<\zeta} F_\alpha^\xi = [0, \alpha] \text{ pro každé } \alpha < \kappa.$$

Ovšem, protože je-li $\alpha < \kappa$, pak pro $\beta > \alpha$ položme $\xi = f(\alpha, \beta)$, pak $\beta \in F_\alpha^\xi$. Položme $G_\alpha^\xi = \bigcup_{\eta \in F_\alpha^\xi} E_\eta$. Pak pro každé $\xi < \zeta$ jsou G_α^ξ po dvou disjunktní, a podle předpokladu, že tvrzení (iii) neplatí, je $\operatorname{card}\{\alpha < \kappa \mid \operatorname{int} G_\alpha^\xi \neq \emptyset\} \le \zeta$. Tedy existuje $\alpha < \kappa$, že G_α^ξ má prázdný vnitřek (a tedy je první kategorie) pro všechna $\xi < \zeta$. Označme $G = \bigcup_{\beta \le \alpha} E_\beta$. Pak $\bigcup \mathcal{E} = G \cup \bigcup_{\xi<\zeta} G_\alpha^\xi$ má podle (i) prázdný vnitřek, což je spor. $\square$

Věta 2.11. *(i) Je-li X Baireův a $c(X) \leq \aleph_0$, pak X má vlastnost (S_κ) pro κ menší než nejmenší slabě nedosažitelný kardinál.*

(ii) Je-li X dědičně Baireův a $c(F) \leq \aleph_0$ pro každou uzavřenou neprázdnou $F \subset X$, pak X je κ-PCP-prostor pro κ menší než nejmenší slabě nedosažitelný kardinál.

Důkaz. (i) Nechť X nemá vlastnost (S_κ) pro nějaké κ menší než nejmenší slabě nedosažitelný kardinál. Buď κ nejmenší takové. Pak, protože X je Baireův, $\kappa > \aleph_0$. Ale podle Lemmatu 2.10.(iii) je $\kappa \leq c(X) \leq \aleph_0$, což je spor.

(ii) Plyne okamžitě z (i) aplikovaného na každý uzavřený neprázdný podprostor X a z Tvrzení 2.1. $\square$

Věta 2.12. *Buď κ_0 nejmenší slabě nedosažitelný kardinál.*

(i) Pokud X je Baireův, $c(X) \leq \aleph_0$, $\pi w(X) \leq \kappa_0$, pak X má vlastnost (S).

(ii) Je-li X dědičně Baireův, $c(F) \leq \aleph_0$ pro každou uzavřenou neprázdnou $F \subset X$ a platí-li jedna z podmínek

(a) X má těsnost $< \kappa_0$,
(b) $\pi w(F) \leq \kappa_0$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou,
(c) $\chi(X) \leq \kappa_0$,
(d) X má silnou těsnost nejvýš κ_0,

pak X je PCP-prostor.

Poznámky. (1) Podmínka (a) v (ii) implikuje podmínku (d), tedy tvrzení pro (a) je speciálním případem tvrzení pro (d).

(2) Za předokladu neexistence slabě nedosažitelných kardinálů má každý Baireův prostor X, pro nějž $c(X) \leq \aleph_0$, vlastnost (S), a každý dědičně Baireův prostor takový, že $c(F) \leq \aleph_0$ pro každý jeho uzavřený podprostor, je PCP-prostor.

Důkaz Věty 2.12. (i) Podle Věty 2.11.(i) má X vlastnost (S_κ) pro $\kappa < \kappa_0$. Podle Tvrzení 2.4 má pak X vlastnost (S).

(ii) Podle Věty 2.11.(ii) je X κ-PCP-prostor pro $\kappa < \kappa_0$. Podle Tvrzení 2.2 resp. 2.4 resp 2.6 resp. 2.8 (podle toho, která z podmínek (a)-(d) je splněna) je pak X PCP-prostor. $\square$

3. PCP-PROSTORY A JEJICH ZACHOVÁVÁNÍ

Tvrzení 3.1. *Buď X topologický prostor, $\emptyset \neq A \subset X$ buď H-množina.*
(i) Je-li X dědičně Baireův, pak A také.
(ii) Je-li X κ-PCP-prostor, kde $\kappa \geq \aleph_0$, pak A také.

Důkaz. (i) Buď X dědičně Baireův. Nejprve dokážeme, že každá neprázdná H-množina v X je druhé kategorie v sobě. Ovšem, buď $\emptyset \neq B$ H-množina v X. Podle definice H-množin existuje $\emptyset \neq G \subset \bar{B}$ relativně otevřená tak, že buď $G \subset B$ nebo $G \subset \bar{B} \setminus B$. Protože B je hustá v $\bar{B}$, je $G \subset B$. Protože $\bar{B}$ je Baireův, je G druhé kategorie v $\bar{B}$, tedy i v B. Tedy B je druhé kategorie v sobě.

Nechť $\emptyset \neq A$ je H-množina v X. Nechť $\emptyset \neq F \subset A$ je relativně uzavřená, nechť $\emptyset \neq G \subset F$ je relativně otevřená. Pak G je H-množina, tedy je druhé kategorie v sobě, tedy i v F. F je tedy Baireův a A dědičně Baireův.

(ii) Buď M diskrétní metrický prostor mohutnosti κ, $f : A \to M$ funkce první H-třídy. Buď M' topologická suma M a jednobodového prostoru $\{\infty\}$. Pak M' je metrizovatelný (a opět diskrétní mohutnosti κ) a funkce $g : X \to M'$ definovaná předpisem

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A, \\ \infty & x \notin A, \end{cases}$$

je první H-třídy, a tedy má PCP. Nechť $\emptyset \neq F \subset A$ je relativně uzavřená. Podle Věty 1.3 je množina bodů nespojitosti $g \restriction F$ první kategorie v F. Protože $g \restriction F = f \restriction F$ a podle (i) je F Baireův prostor, má $f \restriction F$ bod spojitosti. Tedy f má PCP a podle Tvrzení 2.1 je A κ-PCP-prostor. $\square$

Poznámka. Z Poznámky 1.9 a předchozího lemmatu plyne, že každá dědičně Baireova SBPR-podmnožina κ-PCP-prostoru je κ-PCP-prostor.

Řekneme, že systém $\mathcal{A}$ podmnožin topologického prostoru X má *vlastnost (O)*, pokud pro každý $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ existuje $C \in \mathcal{C}$, že C je relativně otevřená v $\bigcup \mathcal{C}$. Systém $\mathcal{A}$ nezveme *rozptýleným*, je-li disjunktní a má vlastnost (O). Příkladem rozptýleného systému je libovolný polootevřený rozklad X, přikladem systému s vlastností (O), který není rozptýlený, je libovolný nedisjunktní systém otevřených množin.

Tvrzení 3.2. *Nechť $\kappa \geq \aleph_0$, nechť $X = \bigcup_{a \in A} X_a$, kde $\{X_a \mid a \in A\}$ je systém κ-PCP-prostorů, který má vlastnost (O). Pak X je κ-PCP-prostor.*

Důkaz. Nechť M je diskrétní metrický prostor mohutnosti κ a $f : X \to M$ funkce první H-třídy. Pak pro každé $a \in A$ je $f \restriction X_a$ první H-třídy, a tedy má PCP. Buď $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřená. Položme $B = \{a \in A \mid F \cap X_a \neq \emptyset\}$. Pak $B \neq \emptyset$, tedy existuje $a \in B$ tak, že X_a je relativně otevřené v $\bigcup_{b \in B} X_b$, tedy $X_a \cap F$ je otevřená v F. Dále $f \restriction F \cap X_a$ má bod spojitosti. A protože $X_a \cap F$ je otevřená v F, je tento bod též bodem spojitosti $f \restriction F$. Tedy f má PCP a podle Tvrzení 2.1 je X κ-PCP-prostor. $\square$

Tvrzení 3.3. *(i) Je-li X řídce rozložený prostor (t.j. každá neprázdná podmnožina X má izolovaný bod, ekvivalentně, systém všech jednobodových množin je rozptýlený), pak X je PCP-prostor. Speciálně každý ordinál s topologií uspořádání je PCP-prostor.*

(ii) Je-li X κ-PCP-prostor, kde $\kappa \geq \aleph_0$, a Y je řídce rozložený, pak $X \times Y$ je κ-PCP-prostor.

Důkaz. Plyne okamžitě z Tvrzení3.2. □

V dalším dokážeme, že sjedocení konečně mnoha κ-PCP-prostorů je κ-PCP-prostor, bez jakýchkoli dalších podmínek.

Lemma 3.4. *(i) $X = \bar{Y}$, Y je Baireův $\Rightarrow$ X je Baireův.*

(ii) $X = Y \cup Z$, Y, Z jsou Baireovy $\Rightarrow$ X je Baireův.

Důkaz. (i) Nechť $\emptyset \neq G \subset X$ je otevřená množina první kategorie v X. Pak $G \cap Y \neq \emptyset$ je první kategorie v Y, což je spor s tím, že Y je Baireův.

(ii) Nechť $\emptyset \neq G \subset X$ je otevřená množina první kategorie v X, tedy i první kategorie v sobě. Pokud $\operatorname{int}(G \cap Y) \neq \emptyset$, pak $\operatorname{int}(G \cap Y)$ je druhé kategorie v Y, tedy i v sobě, tedy i v X, tedy G je druhé kategorie v X. Podobně pro $\operatorname{int}(G \cap Z) \neq \emptyset$. Nechť tedy $\operatorname{int}(G \cap Y) = \operatorname{int}(G \cap Z) = \emptyset$. Tedy $G \cap Y$ i $G \cap Z$ jsou husté v G, tedy jsou první kategorie v sobě, tedy i v Y resp. v Z, což je spor s předpokladem, že Y, Z jsou Baireovy prostory. □

Říkáme, že podmnožina Y topologického prostoru X je druhé kategorie v bodě $x \in X$, pokud pro každé V okolí bodu x je $V \cap Y$ druhé kategorie.

Lemma 3.5. *Nechť $Y \subset X$. Pak je ekvivalentní:*

(i) Y je druhé kategorie v každém svém bodě.

(ii) $A \subset X$ první kategorie $\Rightarrow \operatorname{int}_Y(A \cap Y) = \emptyset$.

(iii) Y je Baireův a $\overline{\operatorname{int} \bar{Y}} = \bar{Y}$.

Důkaz. *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* Nechť $x \in Y$ je bod, v němž Y není druhé kategorie. Tedy existuje V okolí x, že $Y \cap V$ je první kategorie. Položme $A = Y \cap V$, pak A je první kategorie, ale $\operatorname{int}_Y(A \cap Y) \neq \emptyset$, což odporuje (ii).

(i) $\Rightarrow$ *(iii)* Zřejmě Y je Baireův a $\bar{Y}$ rovněž splňuje (i). Dokážeme, že $\operatorname{int} \bar{Y}$ je hustá v $\bar{Y}$. Nechť $x \in \bar{Y}$, V buď otevřené okolí x. Pak $V \cap \bar{Y}$ je H-množina druhé kategorie (podle (i) pro $\bar{Y}$), tedy má neprázdný vnitřek (Tvrzení 1.1). Je-li z vnitřní bod, pak též $z \in \operatorname{int} \bar{Y}$, tedy V protíná $\operatorname{int} \bar{Y}$, čímž je hustota dokázána.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)* Nechť A je podmnožina X první kategorie. Pak $A \cap \bar{Y}$ je první kategorie v $\bar{Y}$, neboť $\bar{Y}$ je uzávěr otevřené množiny. Dále $A \cap Y$ je první kategorie v Y, protože Y je hustá v $\bar{Y}$. A protože Y je Baireův, je $\operatorname{int}_Y(A \cap Y) = \emptyset$. □

Lemma 3.6. *Nechť $\kappa \geq \aleph_0$.*

(i) Je-li $X = \bar{Y}$ a má-li Y vlastnost (H_κ), má X vlastnost (H_κ).

(ii) Nechť X je Baireův, nechť $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$, kde Y_0 je první kategorie v X, Y_n pro $n \geq 1$ mají vlastnost (H_κ) a splňují podmínku (ii) z Lemmatu 3.5, pak X má vlastnost (H_κ).

(iii) Nechť $X = \bigcup_{n=0}^{N} Y_n$, kde $\operatorname{int} Y_0 = \emptyset$, Y_n pro $1 \leq n \leq N$ mají vlastnost (H_κ) a splňují podmínku (ii) z Lemmatu 3.5, pak X má vlastnost (H_κ).

(iv) Má-li X vlastnost (H_κ), pak každá jeho neprázdná otevřená podmnožina má vlastnost (H_κ).

Důkaz. (i) Nechť $\mathcal{E}$ je úplně H_σ-aditivní systém množin první kategorie v X, jehož mohutnost je nejvýš κ. Označme $\mathcal{E}' = \{E \cap Y \mid E \in \mathcal{E}\}$. Pak $\mathcal{E}'$ je úplně H_σ-aditivní systém množin první kategorie v Y, a tedy $\bigcup \mathcal{E}'$ má v Y prázdný vnitřek. Protože $\bigcup \mathcal{E}' = Y \cap \bigcup \mathcal{E}$ a Y je hustá v X, má i $\bigcup \mathcal{E}$ prázdný vnitřek.

(ii) Nechť $\mathcal{E}$ je úplně H_σ-aditivní systém množin první kategorie v X, jehož mohutnost je nejvýš κ. Nechť $n \geq 1$. Označme $\mathcal{E}_n = \{E \cap Y_n \mid E \in \mathcal{E}\}$. Pak $\mathcal{E}_n$ je úplně H_σ-aditivní a protože Y_n splňují podmínku (ii) z Lemmatu 3.5, mají prvky $\mathcal{E}_n$ prázdný vnitřek v Y_n, a tedy (protože jsou to množiny H_σ) jsou první kategorie v Y_n. Protože Y_n má vlastnost (H_κ), má $\bigcup \mathcal{E}_n$ prázdný vnitřek v Y_n, tedy je první kategorie v Y_n, tedy i v X. A tedy $\bigcup \mathcal{E} \subset Y_0 \cup \bigcup_{n \geq 1} \bigcup \mathcal{E}_n$ je první kategorie v X, a protože X je Baireův, má prázdný vnitřek. Tedy X má vlastnost (H_κ).

(iii) Označme $Z = \bigcup_{n=1}^{N} Y_n$. Postupnou aplikací Lemmatu 3.4.(ii) dokážeme, že Z je Baireův. Protože Y_n pro $1 \leq n \leq N$ splňují podmínku (ii) z Lemmatu 3.5, podle části (ii) má Z vlastnost (H_κ). Protože Z je hustá v X, podle části (i) má X vlastnost (H_κ).

Tvrzení (iv) je zřejmé. □

Tvrzení 3.7. *(i) Nechť X je Baireův, nechť $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, kde Y_n mají vlastnost (H_κ). Pak X má vlastnost (H_κ).*

(ii) Nechť $X = \bigcup_{n=1}^{N} Y_n$, kde Y_n mají vlastnost (H_κ). Pak X má vlastnost (H_κ).

Důkaz. (i) Podle Lemmatu 3.6.(i) lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že Y_n jsou uzavřené. Pak $Y_n = \operatorname{int} Y_n \cup \operatorname{bd} Y_n$, přitom je-li $\operatorname{int} Y_n \neq \emptyset$, má vlastnost (H_κ) a splňuje podmínku (iii) (a tedy i (ii)) z Lemmatu 3.5, a $\operatorname{bd} Y_n$ je řídká. Tedy $Y_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{bd} Y_n$ je množina první kategorie. Tedy podle Lemmatu 3.6.(ii) má X vlastnost (H_κ).

(ii) Podle Lemmatu 3.4.(ii) je X Baireův, pak podle části (i) má vlastnost (H_κ). □

Věta 3.8. *Buď $\kappa \geq \aleph_0$.*

(i) Je-li X dědičně Baireův a $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, kde Y_n jsou κ-PCP-prostory, pak X je κ-PCP-prostor.

(ii) Je-li $X = \bigcup_{n=1}^{N} Y_n$, kde Y_n jsou κ-PCP-prostory, pak X je κ-PCP-prostor.

Důkaz. Plyne okamžitě z Tvrzení 3.7 užitého na každou neprázdnou uzavřenou pod- množinu X. □

Poznámky. (1) Je přirozená otázka, zda vlastnost *být κ-PCP-prostorem* je nějak dědič- ná. Že se dědí na dědičně Baireovy SBPR-podmnožiny (t.j. na H-množiny), říká Tvrzení 3.1. Příklad 7.4 pak ukazuje, že se nemusí dědit na všechny dědičně Baireovy podprostory. Protože G_δ podmnožina dědičně Baireova prostoru je dědičně Baireův prostor, nabízí se otázka, zda totéž platí pro κ-PCP-prostory. Pokud ano, pak toto tvrzení lze snadno rozšířit na dědičně Baireovy BPR-podmnožiny.

(2) Jinou otázkou je, zda pro vlastnosti (S_κ) resp. (H_κ) platí analogie Kuratowkého-Ulamovy věty, která říká, že součin dvou Baireových prostorů je Baireův, pokud jeden z nich má spočetnou pseudováhu.

(3) O tom, že součin dvou PCP-prostorů nemusí být PCP-prostor, svědčí Příklad 7.7, který ukazuje dva PCP-prostory, jejichž součin je první kategorie v sobě. (Ovšem žádný z nich nemá spočetnou pseudováhu.)

4. t-BAIREOVY PROSTORY

V této kapitole definujeme podle [3, část 3] třídu dědičně Baireových prostorů (dědič- ně t-Baireovy prostory), které, za předpokladu neexistence měřitelných kardinálů, jsou PCP-prostory, což dokážeme podle [3, část 4] s využitím výsledků [4] a [8].

Je-li X topologický prostor, značíme $M(X)$ prostor všech nezáporných konečných borelovských měr na X. *Slabou topologií* na $M(X)$ rozumíme nejmenší topologii takovou, že zobrazení $\mu \mapsto \mu(X)$ je spojité na $M(X)$ a pro každou $G \subset X$ otevřenou je zobrazení $\mu \mapsto \mu(G)$ zdola polospojité. Bázi této topologie tedy tvoří množiny tvaru $\{\mu \in M(X), \mu(X) < \varepsilon, \mu(G_i) > \delta_i, i = 1...n\}$, kde $\varepsilon > 0, \delta_i > 0, G_i \subset X$ jsou otevřené pro $i = 1...n$. Je-li X Hausdorffův, pak systém

$$\mathcal{F} = \{\{\mu \in M(X) \mid \mu(X) < \varepsilon, \mu(G_i) > \delta, i = 1...n\} \mid \\ G_i \subset X \text{ po dvou disjunktní}, \varepsilon > n\delta, \delta > 0\}$$

tvoří pseudobázi $M(X)$. Pro $\mu \in M(X)$ značí $\mu \times ... \times \mu$ součinovou míru definovanou na součinové σ-algebře, $(\mu \times ... \times \mu)^*$ pak příslušnou vnější míru definovanou na všech podmnožinách $X \times ... \times X$. Míra $\mu \in M(X)$ se nazývá *Radonova*, pokud pro každou $B \subset X$ borelovskou platí: $\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset B$ kompaktní$\}$; μ se nazývá *τ-aditivní*, pokud pro každou $B \subset X$ borelovskou platí: $\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset B$ uzavřená$\}$ a navíc pro každý systém $\mathcal{G}$ otevřených množin v X splňující podmínku $(G_1, G_2 \in \mathcal{G}) \Rightarrow (\exists G \in \mathcal{G})(G \supset G_1 \cup G_2)$, platí: $\mu(\bigcup \mathcal{G}) = \sup\{\mu(G) \mid G \in \mathcal{G}\}$. Prostor všech Radonových resp. τ-aditivních měr na X značíme $M_t(X)$ resp. $M_\tau(X)$. Pak $M_t(X)$ je hustý v $M(X)$ a $M_t(X) \subset M_\tau(X)$. Množinu $Y \subset X$ nazveme *μ-měřitelnou*, kde $\mu \in M(X)$, existují-li A, B borelovské v X, že $A \subset Y \subset B$ a $\mu(A) = \mu(B)$. $Y \subset X$ se nazývá *radonovsky* resp. *τ-měřitelná*, je-li μ-měřitelná pro každou $\mu \in M_t(X)$ resp. $\mu \in M_\tau(X)$. Prostor X se nazývá *t-Baireův*, jestliže je Hausdorffův a $M_t(X)$ je druhé kategorie v sobě, X se nazývá *dědičně t-Baireův*, pokud každý jeho neprázdný uzavřený podprostor je t-Baireův.

Budeme potřebovat některé výsledky [4]:

Lemma 4.1. *(*[4, Věta 2.1]*) Buď X Hausdorffův topologický prostor, M buď hustá podmnožina M(X),* $n \geq 1$, $A \subset X^n$ *první kategorie. Pak* $\{\mu \in M \mid (\mu \times ... \times \mu)^*(A) > 0\}$ *je první kategorie v M.*

Lemma 4.2. *(*[4, Věta 3.1]*) Buď X Hausdorffův topologický prostor, M buď hustá podmnožina M(X), která je druhé kategorie v sobě,* $n \geq 1$, $A \subset X^n$ *množina s Baireovou vlastností. Pak*

(a) A je první kategorie v X^n*, právě když* $\{\mu \in M \mid (\mu \times ... \times \mu)^*(A) > 0\}$ *je první kategorie v M.*

(b) A je druhé kategorie v X^n*, právě když* $\{\mu \in M \mid (\mu \times ... \times \mu)^*(A) = 0\}$ *je první kategorie v M.*

Důkaz. Implikace „⇒ " části (a) je vlastně Lemma 4.1. Dále dokážeme implikaci „⇒ " části (b). Je-li A druhé kategorie, pak $A = G \triangle P$, kde $\emptyset \neq G$ je otevřená a P je první kategorie v X^n. Buďte $V_i, i = 1...n$ neprázdné otevřené v X takové, že $\prod_{i=1}^n V_i \subset G$. Pak $A \supset (\prod_{i=1}^n V_i) \setminus P$, a podle Lemmatu 4.1 je množina $C = \{\mu \in M, (\mu \times ... \times \mu)^*(P) > 0\}$ první kategorie v M. Jest

$$\{\mu \in M \mid (\mu \times ... \times \mu)^*(A) = 0\} \subset C \cup \bigcup_{i=1}^n \{\mu \in M \mid \mu(V_i) = 0\},$$

přičemž množiny $\{\mu \in M \mid \mu(V_i) = 0\}$ jsou uzavřené řídké v M (uzavřenost plyne z definice slabé topologie, řídkost z toho, že každý prvek $\mathcal{F}$ obsahuje nějaké μ takové, že $\mu(V_i) > 0$), tedy pravá strana je první kategorie.

Obrácené implikace obou částí plynou z již dokázaných a z toho, že M je druhé kategorie v sobě. □

Důsledek 4.3. *(*[4, Důsledek 3.5]*) X buď Hausdorffův topologický prostor takový, že M(X) je druhé kategorie. Pak X^n je Baireův pro každé $n \geq 1$.*

Důkaz. Buď $\emptyset \neq G \subset X^n$ otevřená. Zvolme $V_i,\ i = 1...n$ neprázdné otevřené v X takové, že $\prod_{i=1}^n V_i \subset G$. Pak

$$\{\mu \in M(X) \mid (\mu \times ... \times \mu)^*(G) = 0\} \subset \bigcup_{i=1}^n \{\mu \in M(X) \mid \mu(V_i) = 0\},$$

kde pravá strana je první kategorie v $M(X)$ (podobně jako v důkaze předešlého lemmatu), tedy podle Lemmatu 4.2.(b) je G druhé kategorie v X^n. □

Lemma 4.4. *(*[3, Tvrzení 3.3]*) (i) Reziduální podprostor t-Baireova prostoru je t-Baireův.*

(ii) Otevřená podmnožina t-Baireova prostoru je t-Baireův prostor.

Důkaz. (i) Buď X t-Baireův a $Y \subset X$ reziduální. Definujme $h : M_t(Y) \to M_t(X)$ předpisem $h(\mu)(B) = \mu(B \cap Y)$ pro $\mu \in M_t(Y),\ B \subset X$ borelovskou. Pak h je zřejmě topologické vnoření (t.j. homeomorfismus $M_t(Y)$ na svůj obraz.) Protože X je Baireův (Důsledek 4.3), existuje $Z \subset Y$ hustá G_δ-podmnožina X. Pak zřejmě $h(M_t(Y)) \supset \{\mu \in M_t(X) \mid \mu(X \setminus Z) = 0\}$, což je podle Lemmatu 4.1 reziduální podmnožina $M_t(X)$, tedy $M_t(Y)$ je druhé kategorie.

(ii) Buď X t-Baireův, $Y \subset X$ otevřená. Položme $S = \{\mu \in M_t(X) \mid \mu(\bar{Y} \setminus Y) = 0\}$. Pak S je reziduální v $M_t(X)$. Nechť $h : M_t(X) \to M_t(Y)$ je zobrazení, které míře μ přiřadí její restrikci na borelovské podmnožiny Y. Pak:

(1) h je spojitá v každém bodě S,

(2) $D \subset M_t(Y)$ hustá $\Rightarrow S \cap h^{-1}(D)$ je hustá v S.

Ad (1): Buď $\mu_0 \in S$, buď $W = \{\nu \in M_t(Y) \mid \nu(Y) < \beta, \nu(U_i) > \alpha_i, i = 1, ..., n\}$, kde $\beta > 0, \alpha_i \geq 0, U_i \subset Y$ otevřené pro $i = 1, ..., n$, okolí $h(\mu)$ v $M_t(Y)$. Pak $V = \{\nu \in M_t(X) \mid \nu(\bar{Y}) < \beta, \nu(U_i) > \alpha_i, i = 1, ..., n\}$ je otevřená v $M_t(X)$ a $h(V) \subset W$ a navíc, protože $\mu_0 \in S$, je $\mu_0 \in V$.

Ad (2): Buď D hustá v $M_t(X)$. Buď $W = \{\nu \in S \mid \nu(X) < \beta, \nu(U_i) > \alpha_i, i = 1, ..., n\}$, kde $\beta > 0, \alpha_i \geq 0, U_i \subset X$ otevřené pro $i = 1, ..., n$, neprázdná otevřená podmnožina S. Buď $\mu_0 \in W$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $\varepsilon < \beta - \mu_0(X)$ a $\varepsilon < \mu_0(U_i) - \alpha_i$ pro $i = 1, ..., n$. Pak $V = \{\nu \in M_t(Y) \mid \nu(Y) < \mu_0(Y) + \varepsilon, \nu(Y \cap U_i) > \mu_0(Y \cap U_i) - \varepsilon, i =$

$1, ..., n\}$ je otevřená v $M_t(Y)$, navíc neprázdná, protože $h(\mu_0) \in V$. Tedy existuje $\nu_0 \in D \cap V$. Položme $\lambda_0(B) = \nu_0(B \cap Y) + \mu_0(B \setminus \bar{Y})$ pro $B \subset X$ borelovskou. Pak $\lambda_0 \in S \cap h^{-1}(D) \cap W$. Tedy $S \cap h^{-1}(D)$ je hustá v S.

Dále, pokud N je řídká v $M_t(Y)$, je $h^{-1}(N)$ první kategorie v $M_t(X)$. Ovšem, položme $D = M_t(Y) \setminus \bar{N}$. Pak D je otevřená hustá v $M_t(Y)$, tedy $h^{-1}(D)$ je otevřená v $M_t(X)$ a $h^{-1}(D) \cap S$ je hustá v S. Tedy $N \cap S$ je řídká v S, tedy N je první kategorie v $M_t(X)$. Tedy, kdyby $M_t(Y)$ bylo první kategorie v sobě, bylo by i $M_t(X) = h^{-1}(M_t(Y))$ první kategorie v sobě, což je spor. Tedy $M_t(Y)$ je t-Baireův. $\square$

Lemma 4.5. *Je-li X dědičně t-Baireův a Y dědičně Baireova BPR-podmnožina X, pak Y je dědičně t-Baireův.*

Důkaz. Buď $F \subset Y$ relativně uzavřená. Pak F je Baireův a má BP v $\bar{F}$, tedy $F = A \cup N$, kde A je G_δ a N první kategorie v $\bar{F}$. Protože F je hustá v $\bar{F}$, je N první kategorie v F. Protože F je Baireův, je $\operatorname{int}_F N = \emptyset$, tedy A je hustá v F, tedy i v $\bar{F}$. Tedy F je reziduální v $\bar{F}$, tedy podle Lemmatu 4.4 t-Baireův. $\square$

Podle [7, II, Věta 17] jsou kompaktní Hausdorffovy prostory t-Baireovy, tedy i dědičně t-Bairovy. Z Lemmatu 4.4.(i) pak plyne, že každý čechovsky úplný prostor (t.j. prostor, který je homeomorfní G_δ-podmnožině Hausdorffova kompaktního prostoru) je t-Baireův. Protože uzavřený podprostor čechovsky úplného prostoru je čechovsky úplný, jsou čechovsky úplné prostory dědičně t-Baireovy. To platí i pro obecnější třídu prostorů - pro *H-úplné prostory.* Prostor nazveme H-úplným, je-li homeomorfní H_δ-podmnožině (t.j. spočetnému průniku H-množin) kompaktního Hausdorffova prostoru. Je-li Y H-úplný, X jeho kompaktifikace, v níž je Y H_δ, pak Y je reziduální v X, tedy t-Baireův. A protože uzavřený podprostor H-úplného prostoru je H-úplný, jsou H-úplné prostory dokonce dědičně t-Baireovy. Ještě obecněji, prostory, které jsou reziduální v nějaké své kompaktifikaci (ekvivalentně, které obsahují jako hustou podmnožinu čehovsky úplný prostor, t.j. *skoro čechovsky úplné prostory*) jsou t-Baireovy. A tedy prostory, jejichž každý neprázdný uzavřený podprostor je skoro čechovsky úplný, jsou dědičně t-Baireovy. Následující lemma, které se dokazuje podobně jako Lemma 4.5 uvádí charakterizaci těchto prostorů.

Lemma 4.6. *(*[1, Tvrzení 2]*) Buď X úplně regulární. Pak je ekvivalentní:*

(i) X je dědičně Baireův a má BPR v nějaké kompaktifikaci.

(ii) Každý neprázdný uzavřený podprostor X je skoro čechovsky úplný.

(iii) Každý neprázdný uzavřený podprostor X obsahuje jako hustou podmnožinu H-úplný prostor.

Poznámka. (1) Ekvivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ vlastně nedává nic nového, protože je zřejmé, že prostor je skoro čechovsky úplný, právě když obsahuje H-úplný prostor jako hustou podmnožinu.

(2) Je otázkou, zda každý (nebo alespoň každý úplně regulární) dědičně t-Baireův prostor již splňuje podmínku (i) předchozího Lemmatu. Příklad 1.2 v [11] ukazuje metrický t-Baireův prostor, který nemá BP v žádné kompaktifikaci, avšak tento prostor není dědičně Baireův, a tedy ani dědičně t-Baireův.

Dalším naším cílem je dokázat, že dědičně t-Baireovy prostory jsou κ-PCP-prostory pro κ menší než nejmenší $\{0,1\}$-měřitelný kardinál. Připomeňme, že κ je $\{0,1\}$-*měřitelný* (krátce *měřitelný*), existuje-li netriviální σ-aditivní míra definovaná na všech podmnožinách množiny mohutnosti κ, která nabývá hodnot jen 0 nebo 1 a je nulová na jednoprvkových množinách.

Tvrzení 4.7. *Buď X Baireův prostor a $\mathcal{E}$ úplně H_σ-aditivní systém množin první kategorie, který pokrývá X. Položme $P = \bigcup\{E \times E, E \in \mathcal{E}\}$. Není-li P řídká v $X \times X$, je* card $\mathcal{E}$ *měřitelná.*

Důkaz. Nechť P není řídká v $X \times X$. Pak existují U, V neprázdné otevřené podmnožiny X, že $U \times V \subset \bar{P}$. Nejprve dokážeme, že $U \times U \subset \bar{P}$.

Buďte W_1, W_2 neprázdné otevřené podmnožiny U. Dokážeme, že $(W_1 \times W_2) \cap P \neq \emptyset$ Pro $j = 1, 2$ položme: $A_j = V \cap \bigcup\{E \in \mathcal{E} | \; E \cap W_j = \emptyset\}$. Pak, protože $\mathcal{E}$ je disjunktní, je $(W_j \cap \operatorname{int} A_j) \cap P = \emptyset$. Protože však $W_j \times \operatorname{int} A_j$ je otevřená podmnožina $U \times V$ a $U \times V \subset \bar{P}$, je nutně $\operatorname{int} A_j = \emptyset$. Protože A_j jsou H_σ, jsou první kategorie v X, a protože X je Baireův, je $V \setminus (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$, tedy existuje $E \in \mathcal{E}$, že $E \cap V \setminus (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$. Pak zřejmě $E \cap W_j \neq \emptyset$, $j = 1, 2$, tedy $P \cap (W_1 \times W_2) \supset (E \times E) \cap (W_1 \times W_2) \neq \emptyset$ pro každé $W_1, W_2 \subset U$ neprázdné otevřené, tedy $U \times U \subset \bar{P}$.

Dále položme $\mathcal{I} = \{\mathcal{J} \subset \mathcal{E} | \; \operatorname{int}((\bigcup \mathcal{J}) \cap U) = \emptyset\}$. Pak $\mathcal{I}$ je σ-ideál (t.j. s každým prvkem obsahuje všechny jeho podmnožiny a je uzavřený na spočené sjednocení), což plyne z toho, že pro $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}$ je $\operatorname{int}((\bigcup \mathcal{J}) \cap U) = \emptyset$, právě když $(\bigcup \mathcal{J}) \cap U$ je první kategorie. A navíc, pokud $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ jsou disjunktní podmnožiny $\mathcal{E}$, pak buď $\mathcal{J}_1 \in \mathcal{I}$ nebo $\mathcal{J}_2 \in \mathcal{I}$. Ovšem, buďte $W_j = \operatorname{int}((\bigcup \mathcal{J}_j) \cap U)$, $j = 1, 2$. Pak W_1, W_2 jsou otevřené podmnožiny U a $(W_1 \times W_2) \cap P = \emptyset$, protože $\mathcal{E}$ je disjunktní. Tedy buď W_1 nebo W_2 je prázdná, tedy $\mathcal{J}_1 \in \mathcal{I}$ nebo $\mathcal{J}_2 \in \mathcal{I}$.

Pro $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}$ položme $\mu(\mathcal{J}) = 0$ pokud $\mathcal{J} \in \mathcal{I}, \mu(\mathcal{J}) = 1$, pokud $\mathcal{J} \notin \mathcal{I}$. Pak μ je netriviální σ-aditivní míra na všech podmnožinách $\mathcal{E}$, která je nulová na jednoprvkových množinách a nabývá hodnot 0 nebo 1. Tedy card $\mathcal{E}$ je měřitelná. □

Poznámka. Předchozí tvrzení je obsaženo v důkaze Lemmatu 4.6 v [3] (naše Tvrzení 4.10). Avšak zdá se, že samo o sobě má určitou hodnotu a platí za slabších předpokladů než těch, které jsou obsaženy ve znění citovaného lemmatu.

Lemma 4.8. *(*[3, Lemma 4.4]*) Každá H-množina v topologickém prostoru X je τ-měřitelná.*

Důkaz. Buď $\mu \in M_\tau(X)$. Nejprve dokážeme

(*) Je-li $A \subset X$ a pro každé $x \in A$ existuje U otevřené okolí x, že $A \cap U$ je μ-měřitelná, pak A je μ-měřitelná.

Nechť je splněn předpoklad v (*). Pak existuje systém $(G_i)_{i \in I}$ otevřených množin, že $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ a $A \cap G_i$ je μ-měřitelná pro každé $i \in I$. Protože μ je τ-aditivní, platí:

$$\mu(\bigcup_{i \in I} G_i) = \sup\{\mu(\bigcup_{i \in K} G_i \mid K \subset I \text{ konečná}\}.$$

Tedy existuje $J \subset I$ spočetná, že $\mu(\bigcup_{i \in I} G_i) = \mu(\bigcup_{i \in J} G_i)$. Položme $B = \bigcup_{i \in J}(A \cap G_i)$. Pak B je μ-měřitelná, $B \subset A$ a $A \setminus B \subset (\bigcup_{i \in I} G_i) \setminus (\bigcup_{i \in J} G_i)$, což je μ-nulová množina, tedy A je μ-měřitelná.

Dále buď $Z \subset X$ H-množina. Buď $\mathcal{D}$ polootevřený rozklad X takový, že Z je sjednocením nějakého jeho podsystému. Pišme $\mathcal{D} = \{D_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, kde $\bigcup_{\alpha \leq \beta} D_\alpha$ je otevřená pro každé $\beta < \kappa$. Dokážeme, že pro každé $\beta \leq \kappa$ je $Z \cap \bigcup_{\alpha < \beta} D_\alpha$ μ-měřitelná. Pro $\beta = 0$ to zřejmě platí. Nechť to platí pro $\beta < \gamma$, kde $0 < \gamma \leq \kappa$.

Je-li γ limitní, pak podle (*) je $Z \cap \bigcup_{\alpha<\gamma} D_\alpha$ je μ-měřitelná. Je-li $\gamma = \beta + 1$, je $Z \cap \bigcup_{\alpha<\gamma} D_\alpha = (Z \cap \bigcup_{\alpha<\beta} D_\alpha) \cup F_\beta$, kde $F_\beta = D_\beta$, pokud $D_\beta \subset Z$, a $F_\beta = \emptyset$, pokud $D_\beta \subset X \setminus Z$. V obou případech je F_β borelovská, tedy $Z \cap \bigcup_{\alpha<\gamma} D_\alpha$ je μ-měřitelná. Tím je důkaz proveden. $\square$

Lemma 4.9. *(i) (*[8, Věta 6M(a)]*) Buď X Hausdorffův a $\mu \in M_t(X)$. Buď $\mathcal{E}$ disjunktní systém μ-nulových množin takový, že $\bigcup\mathcal{E}'$ je μ-měřitelné pro každé $\mathcal{E}' \subset\mathcal{E}$. Pak $\bigcup\mathcal{E}$ je μ-nulová množina.*

(ii) ([8, Tvrzení 7N(b)]*) Buď X Hausdorffův kompaktní prostor, pro který $c(X) \leq \aleph_0$. Pak sjednocení každého úplně BP-aditivního systému množin první kategorie v X je první kategorie.*

Tvrzení 4.10. *(*[3, Lemma 4.6]*) Je-li X t-Baireův a κ menší než nejmenší měřitelný kardinál, pak X má vlastnost (H_κ).*

Důkaz. Buď $\mathcal{E}$ úplně H_σ-aditivní systém množin první kategorie v X, mohutnosti nejvýš κ. Nechť $\operatorname{int}\bigcup\mathcal{E} \neq \emptyset$. Protože otevřený podprostor t-Baireova prostoru je t-Baireův (Lemma 4.4.(ii)), můžeme předpokládat $\bigcup\mathcal{E} = X$. Položme $P = \bigcup\{E \times E \mid E \in\mathcal{E}\}$. Je-li $\mu \in M_t(X)$ a $(\mu\times\mu)^*(P) = 0$, pak pro každé $E \in\mathcal{E}$ je $(\mu\times\mu)^*(E\times E) = 0$, tedy $\mu(E) = 0$. Podle Lemmatu 4.8 je $\bigcup\mathcal{E}'$ μ-měřitelná množina pro každé $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$. Tedy podle Lemmatu 4.9.(i) je $\mu(X) = 0$, tedy $\mu = 0$. Pak podle Lemmatu 4.1 P není první kategorie (jinak by totiž existovala $0 \neq \mu \in M_t(X)$, pro kterou $(\mu \times \mu)^*(P) = 0$, protože $M_t(X)$ je druhé kategorie v sobě), tedy speciálně není řídká. Tedy podle Tvrzení 4.7 je κ měřitelný, což je spor. $\square$

Věta 4.11. *(*[3, Věta 4.1]*) Je-li X dědičně t-Baireův a κ menší než nejmenší měřitelný kardinál, pak X je κ-PCP-prostor.*

Důkaz. Plyne z Tvrzení 2.1 a Tvrzení 4.10 aplikovaného na každý uzavřený podprostor X. $\square$

Věta 4.12. *Nechť κ_0 je nejmenší měřitelný kardinál.*

(i) Je-li X t-Baireův a $\pi w(X) \leq \kappa_0$, pak X má vlastnost (H).

(ii) Je-li X dědičně t-Baireův prostor splňující jednu z podmínek

(a) X má těsnost menší než κ_0,

(b) $\pi w(F) \leq \kappa_0$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou,

(c) $\chi(X) \leq \kappa_0$,

(d) X má silnou těsnost nejvýš κ_0.

Pak X je PCP-prostor.

Důkaz. (i) Podle Tvrzení 4.10 X má vlastnost (H_κ) pro $\kappa < \kappa_0$. Podle poznámky za Tvrzením 2.4 pak X má vlastnost (H).

(ii) Podle Věty 4.11 je X κ-PCP-prostor pro $\kappa < \kappa_0$. Podle Tvrzení 2.2 resp. poznámky za Tvrzením 2.4 resp. Tvrzení 2.6 resp. Tvrzení 2.8 (podle toho, která z podmínek (a)-(d) je splněna) je X PCP-prostor. $\square$

Poznámky. (1) Podmínka (a) implikuje podmínku (d), tedy tvrzení pro (a) je důsledkem tvrzení pro (d).

(2) Za předpokladu neexistence měřitelných kardinálů každý t-Baireův prostor má vlastnost (H) a každý dědičně t-Baireův prostor je PCP-prostor.

Dále, následujíce [3], dokážeme větu, která dává do souvislosti funkce f a $f \times f$. Je-li $f : X \to M$, kde X je topologický prostor a M metrický, a je-li $\mu \in M(X)$, řekneme, že f má *μ-skoro separabilní obor hodnot*, existuje-li $N \subset X$ μ-nulová množina tak, že $f(X \setminus N)$ je separabilní.

Věta 4.13. *(*[3, Věta 4.2]*) Buď X dědičně t-Baireův, M metrický prostor, $f : X \to M$. Pak podmínky*

(a) f má PCP,

(b) $f \times f$ je první H-třídy,

(c_1) f je první H-třídy,

(c_2) f je BPR-měřitelná (t.j. $f^{-1}(G)$ má BPR pro každou $G \subset M$ otevřenou),

(c_3) f je μ-měřitelná (t.j. $f^{-1}(G)$ je μ-měřitelná pro každou $G \subset M$ otevřenou) pro každou $\mu \in M_t(X)$,

(c_4) f má μ-skoro separabilní obor hodnot pro každou $\mu \in M_t(X)$,

(c_5) $f \restriction K$ má PCP pro každý $K \subset X$ kompakt,

(d) pro každé $\varepsilon > 0$ množina $\{(x, y) \mid \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon\}$ je H_σ v $X \times X$, kde ρ značí metriku v M,

jsou v následujícím vztahu: (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c_i)&(d) pro i=1,…,5.

Lemma 4.14. *(*[3, Lemma 4.8]*) Buď X t-Baireův a M metrický prostor, $f : X \to M$ funkce splňující (c_4) a (d) z Věty 4.13. Pak množina bodů spojitosti f je hustá G_δ-podmnožina X.*

Důkaz. Pro $x \in X$ položme $O_f(x) = \inf\{\operatorname{diam} f(U) \mid U \text{ okolí } x\}$. Pak O_f je shora polospojitá a f je spojitá v bodě x, právě když $O_f(x) = 0$. Protože $\{x \in X \mid O_f(x) = 0\}$ je G_δ a X je Baireův, stačí dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in X \mid O_f(x) \leq \varepsilon\}$ hustá v X, t.j. pro každou $\emptyset \neq U \subset X$ otevřenou existuje $\emptyset \neq V \subset U$ otevřená, že $\operatorname{diam} f(V) \leq \varepsilon$.

Buď $\varepsilon > 0$, bez újmy na obecnosti předpokládejme $U = X$. Položme $P = \{(x, y) \mid \rho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Buď $\mu \in M_t(X)$ taková, že $(\mu \times \mu)^*(P) = 0$. Protože f má μ-skoro separabilní obor hodnot, existují $y_n \in M, n = 1, 2, ...,$ že $f(x) \in \bigcup_{n=1}^\infty B(y_n, \frac{\varepsilon}{4})$ pro μ-skoro všechna $x \in X$. Tedy $X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(B(y_n, \frac{\varepsilon}{4}))$ je μ-nulová množina. Protože $f^{-1}(B(y_n, \frac{\varepsilon}{4})) \times f^{-1}(B(y_n, \frac{\varepsilon}{4})) \subset P$, je $f^{-1}(B(y_n, \frac{\varepsilon}{4}))$ rovněž μ-nulová množina. Tedy $\mu = 0$. Podle Lemmatu 4.1 je P druhé kategorie, a protože je zároveň H_σ, má neprázdný vnitřek. Tedy existují U, V neprázdné otevřené podmnožiny X, že $U \times V \subset P$. Zvolme $x \in U$ libovolně. Jsou-li $y, z \in V$, pak $\rho(f(y), f(z)) \leq \rho(f(y), f(x)) + \rho(f(x), f(z)) < \varepsilon$, tedy $\operatorname{diam} f(V) \leq \varepsilon$ a důkaz je proveden. □

Lemma 4.15. *(*[3, Lemma 4.10]*) Buď X topologický prostor, M metrický prostor, $f : X \to M$ a $\mu \in M(X)$ splňující podmínku*

($*$) pro každé $\varepsilon > 0$ a každou $A \subset X$ borelovskou, pro niž $\mu(A) > 0$, existuje $B \subset A$ borelovská, pro niž $\mu(B) > 0$ a $\operatorname{diam} f(B) < \varepsilon$.

Pak f má μ-skoro separabilní obor hodnot.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{B}_\varepsilon$ disjunktní spočetný systém borelovských množin takový, že $\mu(\bigcup \mathcal{B}_\varepsilon) = \mu(X)$ a pro $B \in \mathcal{B}_\varepsilon$ je $\mu(B) > 0$ a

$\operatorname{diam} f(B) < \varepsilon$. Buď totiž $\mathcal{B}_\varepsilon$ maximální disjunktní systém borelovských podmnožin X, že pro $B \in \mathcal{B}_\varepsilon$ platí $\mu(B) > 0$ a $\operatorname{diam} f(B) < \varepsilon$. Protože μ je konečná, je $\mathcal{B}_\varepsilon$ spočetný, a z podmínky ($*$) plyne $\mu(\bigcup \mathcal{B}_\varepsilon) = \mu(X)$.

Nyní položme $N = \bigcup_{n=1}^\infty (X \setminus \bigcup \mathcal{B}_{\frac{1}{n}})$ a $S = f(X \setminus N)$. Pak $\mu(N) = 0$ a S je separabilní, protože pro každé n je $\{f(B) \mid B \in \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}\}$ spočetné pokrytí S množinami o průměru $< \frac{1}{n}$. Tedy f má μ-skoro separabilní obor hodnot. □

Lemma 4.16. *([3, Lemma 4.11]) Buď X Hausdorffův prostor, M metrický prostor a $f : X \to M$ splňující podmínku (d) Věty 4.13. Pak podmínky $(c_i), i = 1,...5$, Věty 4.13 jsou v následujícím vztahu: $(c_1) \Rightarrow (c_2) \Rightarrow (c_3) \Leftrightarrow (c_4) \Leftrightarrow (c_5)$.*

Důkaz. $(c_1) \Rightarrow (c_2)$ plyne z toho, že každá H_σ-množina má BPR.

$(c_2) \Rightarrow (c_4)$ Buď $\mu \in M_t(X)$. Podle Lemmatu 4.15 stačí dokázat, že platí $(*)$. Buď tedy $\varepsilon > 0$ a $A \subset X$ borelovská, aby $\mu(A) > 0$. Protože μ je Radonova, existuje $\emptyset \neq K \subset A$ kompaktní, na němž je μ kladná (t.j. $\mu(U) > 0$ pro každou U neprázdnou relativně otevřenou podmnožinu K). Pak $c(K) \leq \aleph_0$. Buď $\mathcal{G}$ σ-disjunktní (t.j. $\mathcal{G}= \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_n$, kde $\mathcal{G}_n$ jsou disjunktní) otevřené pokrytí M množinami o průměru $< \frac{\varepsilon}{3}$. Položme $\mathcal{E}= \{f^{-1}(G) \cap K \mid G \in\mathcal{G}\}$. Pak podle Lemmatu 4.9.(ii) existuje $G \in\mathcal{G}$, že $E = K \cap f^{-1}(G)$ je druhé kategorie v K.

Zvolme $y \in f(E)$, pak $H = f^{-1}(B(y, \frac{\varepsilon}{3})) \cap G$ obsahuje E (protože $\operatorname{diam} f(E) < \frac{\varepsilon}{3}$), a tedy je druhé kategorie v K. Navíc, zvolíme-li $x \in E$ tak, aby $f(x) = y$, pak množina $f^{-1}(B(y, \frac{\varepsilon}{3}))$ je řez množiny $\{(z, z') \mid \rho(f(z), f(z')) < \frac{\varepsilon}{3}\}$ v bodě x, a tedy je H_σ. Tedy H je H_σ v K, tedy má neprázdný vnitřek. Položme $B = \operatorname{int}_K H$. Pak $\mu(B) > 0$, $B \subset A$ a $\operatorname{diam} f(B) < \varepsilon$.

$(c_3) \Rightarrow (c_4)$ Dokážeme víc: je-li $\mu \in M_t(X)$ a f je μ-měřitelná, pak f má μ-skoro separabilní obor hodnot. Opět stačí dokázat, že platí podmínka $(*)$ z Lemmatu 4.15. Buď $\varepsilon > 0$ a $A \subset X$ borelovská, pro niž $\mu(A) > 0$. Buď $\mathcal{G}$ σ-disjunktní otevřené pokrytí M množinami o průměru $< \varepsilon$. Položme $\mathcal{E}= \{f^{-1}(G) \cap A, G \in\mathcal{G}\}$. Pak podle Lemmatu 4.9.(i) existuje $G \in\mathcal{G}$, že $f^{-1}(G) \cap A$ není μ-nulová, tedy obsahuje borelovskou množinu B, pro niž $\mu(B) > 0$. Protože $\operatorname{diam} f(B) \leq \operatorname{diam} G < \varepsilon$, je B hledaná množina.

$(c_4) \Rightarrow (c_5)$ Buď $K \subset X$ kompaktní, pak $f \restriction K$ splňuje (c_4) a (d), tedy podle Lemmatu 4.14 má bod spojitosti. Protože uzavřená podmnožina kompaktu je kompaktní, má $f \restriction K$ PCP.

$(c_5) \Rightarrow (c_3)$ Buď $\mu \in M_t(X)$, $K \subset X$ kompaktní. Pak $f \restriction K$ má PCP, a tedy podle Věty 1.3 je první H-třídy, tedy podle Lemmatu 4.8 je μ-měřitelná. Protože μ je Radonova, je nesena spočetným sjednocením kompaktních množin, a tedy f je μ-měřitelná. □

Důkaz Věty 4.13. $(a) \Rightarrow (b)$ plyne z Tvrzení 1.8.(ii).

$(b) \Rightarrow (c_1)\&(d)$ je zřejmé.

Nyní předpokládejme (d). Podle Lemmatu 4.16 máme $(c_1) \Rightarrow (c_2) \Rightarrow (c_3) \Leftrightarrow (c_5) \Leftrightarrow (c_4)$ a podle Lemmatu 4.14 je $(c_4) \Rightarrow (a)$. Tím je důkaz proveden. □

Tvrzení 4.17. *Buď X dědičně t-Baireův, κ nekonečný kardinál. Pak je ekvivalentní:*

(i) X je κ-PCP-prostor.

(ii) Je-li $\mathcal{E}$ úplně H_σ-aditivní systém pokrývající X, jehož mohutnost je nejvýš κ, pak $P = \bigcup\{E \times E \mid E \in\mathcal{E}\}$ je H_σ v $X \times X$.

Důkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Buď $\mathcal{E}$ jako v (ii). Buď $M =\mathcal{E}$ s diskrétní metrikou. Pro $x \in X$ položme $f(x) = E$, pokud $x \in E$. Pak f je první H-třídy, tedy má PCP, tedy podle Věty 4.13. $(a) \Rightarrow (d)$ pro $\varepsilon = 1$ je P množina H_σ v $X \times X$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Buď M diskrétní metrický prostor mohutnosti κ, $f : X \to M$ funkce první H-třídy. Pak $\mathcal{E}= \{f^{-1}(x), x \in M\}$ je úplně H_σ-aditivní systém mohutnosti nejvýš κ pokrývající X. Buď P jako v (ii). Pak

$$\{(x,y) \mid \rho(f(x),f(y)) < \varepsilon\} = \begin{cases} P & \varepsilon \leq 1, \\ X \times X & \varepsilon > 1, \end{cases}$$

v každém případě je H_σ. Tedy podle Věty 4.13. $(c_1)\&(d) \Rightarrow (a)$ má f PCP. Tedy podle Tvrzení 2.1 je X κ-PCP-prostor. $\square$

Poznámky. (1) Implikace $(i) \Rightarrow (ii)$ v předchozím tvrzení platí i za předpokladu, že X je jen dědičně Baireův.

(2) Z předchozího tvrzení a z Věty 4.11 plyne, že pro κ menší než nejmenší měřitelný kardinál je (ii) splněno pro každý dědičně t-Baireův prostor. Věta 4.12 pak dává, že pokud X je dědičně t-Baireův a splňuje jednu z podmínek (a)-(d), splňuje (ii) pro každé κ

Důsledek 4.18. *Je-li X dědičně t-Baireův a $X \times X$ dědičně Baireův (speciálně je-li X H-úplný), je-li M metrický prostor, $f : X \to M$, pak $f \times f$ je první H-třídy, právě když má PCP.*

Důkaz. Má-li $f \times f$ PCP, je první H-třídy podle Věty 1.3. Je-li $f \times f$ první H-třídy, pak podle Věty 4.13 f má PCP a podle Tvrzení 1.8.(iii) $f \times f$ má PCP. $\square$

Poznámka 4.19. Označme $P(X)$ resp. $P_t(X)$ resp. $P_\tau(X)$ podprostor $M(X)$ resp. $M_t(X)$ resp. $M_\tau(X)$ tvořený pravděpodobnostními mírami. Protože zřejmě $M_t(X) \setminus \{0\}$ je homeomorfní s $P_t(X) \times (0,\infty)$, plyne z Kuratowského-Ulamovy věty ([6, Věta 15.3]), že X je t-Baireův, právě když $P_t(X)$ je druhé kategorie v sobě.

5. SLABĚ α-FAVORABILNÍ PROSTORY

Prostor $(X, \mathcal{T})$ nazveme *α-favorabilní*, pokud existuje $\tau : \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ takové, že $\tau(G) \subset G$ pro každé G, a kdykoli $G_n, n \in \mathbb{N}$ je posloupnost neprázdných otevřených množin splňující $G_{n+1} \subset \tau(G_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \neq \emptyset$. Prostor nazveme *slabě α-favorabilní*, pokud existuje $\sigma : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{T} \setminus \{\emptyset\})^n \to \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ takové, že $\sigma(G_1, ..., G_n) \subset G_n$ pro každou n-tici $G_1, ..., G_n$, a navíc kdykoli $G_n, n \in \mathbb{N}$ je posloupnost otevřených množin splňující $G_{n+1} \subset \sigma(G_1, ..., G_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \neq \emptyset$. Prostor nazveme *dědičně (slabě) α-favorabilní*, jestliže každý jeho neprázdný uzavřený podprostor je (slabě) α-favorabilní.

Pokud jde o motivaci zavedení pojmu slabě α-favorabilních prostorů a příklady těchto prostorů, odkazujeme na [8,7H a 7K].

Zřejmě každý α-favorabilní prostor je slabě α-favorabilní a snadno se ověří, že každý slabě α-favorabilní prostor je Baireův a že libovolný součin (slabě) α-favorabilních prostorů je (slabě) α-favorabilní.

Každý skoro čechovsky úplný prostor je α-favorabilní. Čechovsky úplné prostory (i H-úplné prostory i dědičně Baireovy prostory mající BPR v nějaké kompaktifikaci (Lemma 4.6)) jsou tedy dědičně α-favorabilní. Pro tyto prostory však tvrzení této kapitoly nejsou zajímavá, protože jsou důsledky mnohem obecnějších tvrzení z kapitol 4 a 6.

Lemma 5.1. *Buď $X = (X, \mathcal{T})$ slabě α-favorabilní prostor a $\mathcal{E}$ úplně SBP-aditivní systém množin první kategorie v X, jehož mohutnost je neměřitelná. Je-li $\emptyset \neq G \subset \bigcup \mathcal{E}$ otevřená, pak* $\operatorname{card}\{E \in \mathcal{E} \mid E \cap G \neq \emptyset\} \geq 2^{\aleph_0}$.

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že platí:

$$(*) \quad \emptyset \neq G \subset \bigcup \mathcal{E} \text{ otevřená } \Rightarrow$$
$$(\exists \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E})(\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_1 = \emptyset \,\&\, \operatorname{int}(G \cap \bigcup \mathcal{E}_i) \neq \emptyset \text{ pro } i = 0, 1).$$

Ovšem, neboť $\mathcal{N} = \{\mathcal{E}' \subset \mathcal{E} \mid \operatorname{int}(G \cap \bigcup \mathcal{E}') = \emptyset\}$ je vlastní σ-ideál na $\mathcal{E}$ obsahující jednoprvkové množiny, a je-li $\operatorname{card} \mathcal{E}$ neměřitelná, existují $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ disjunktní, z nichž ani jedna není prvkem $\mathcal{N}$, což je přesně tvrzení (*).

Dále, $\sigma : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{T} \setminus \{\emptyset\})^n \to \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ buď zobrazení svědčící, že X je slabě α-favorabilní. Buď $\mathcal{E}$ a G jako ve znění lemmatu. Pro $s \in 2^{<\omega}$ sestrojíme $G_s \subset G$ otevřené neprázdné a $\mathcal{E}_s \subset \mathcal{E}$, že položíme-li $H_s = \sigma(G_{s\restriction 0}, ..., G_s)$, platí:

(i) $\mathcal{E}_{s^\frown 0} \cap \mathcal{E}_{s^\frown 1} = \emptyset$, $\mathcal{E}_{s^\frown 0} \cup \mathcal{E}_{s^\frown 1} = \mathcal{E}_s$,

(ii) $\operatorname{int}(H_s \cap \bigcup \mathcal{E}_{s^\frown i}) \neq \emptyset$ pro $i = 0, 1$,

(iii) $G_{s^\frown i} = \operatorname{int}(H_s \cap \bigcup \mathcal{E}_{s^\frown i})$ pro $i = 0, 1$.

Položme $\mathcal{E}_\emptyset = \mathcal{E}$, $G_\emptyset = G$. Máme-li $\mathcal{E}_s$, G_s splňující (i)-(iii) zkonstruovány pro $l(s) \leq n$, volme libovolně $s \in 2^{<\omega}$, $l(s) = n$. Pak podle (iii) je $G_s \subset \bigcup \mathcal{E}_s$, tedy i $H_s \subset \bigcup \mathcal{E}_s$, tedy podle (*) existují $\mathcal{E}_{s^\frown 0}$, $\mathcal{E}_{s^\frown 1}$ disjunktní podmnožiny $\mathcal{E}_s$, jejichž sjednocením je $\mathcal{E}_s$ tak, že $\operatorname{int}(H_s \cap \bigcup \mathcal{E}_{s^\frown i}) \neq \emptyset$ pro $i = 0, 1$. Položme

$G_{s^\frown i} = \operatorname{int}(H_s \cap \bigcup \mathcal{E}_{s^\frown i})$ pro $i = 0, 1$. Takto zkonstruujeme $\mathcal{E}_s$, G_s pro $l(s) \leq n+1$ opět splňující (i)-(iii).

Nyní pro $\alpha \in 2^\omega$ položme $\mathcal{E}_\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_{\alpha\restriction n}$. Podle (i) jsou tato $\mathcal{E}_\alpha$ po dvou disjunktní. Dále $G_{\alpha\restriction n} \subset \bigcup \mathcal{E}_{\alpha\restriction n}$ a navíc $G_{\alpha\restriction n+1} \subset \sigma(G_{\alpha\restriction 0}, ..., G_{\alpha\restriction n})$ pro každé n, a tedy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_{\alpha\restriction n} \neq \emptyset$, tedy $\mathcal{E}_\alpha \neq \emptyset$, tedy $\operatorname{card}\{E \in \mathcal{E} \mid E \cap G \neq \emptyset\} \geq 2^{\aleph_0}$. □

Tvrzení 5.2. *Buď $\kappa > \aleph_0$, buď $X = (X, \mathcal{T})$ slabě α-favorabilní prostor, který má vlastnost (S_τ) pro $\tau < \kappa$, ale nemá vlastnost (S_κ). Není-li κ slabě nedosažitelný, pak $\kappa = \kappa^\omega$.*

Důkaz. Buď $\mathcal{E}$ úplně SBPR-aditivní systém množin první kategorie v X, jehož mohutnost je κ a jehož sjednocení má neprázdný vnitřek. Z Lemmatu 2.10 plyne, že

$$(*) \quad \emptyset \neq G \subset \bigcup \mathcal{E} \text{ otevřená } \Rightarrow (\exists \mathcal{E}_\xi \subset \mathcal{E}, \xi < \kappa)$$
$$(\mathcal{E}_\xi \text{ jsou po dvou disjunktní a } \operatorname{int}(G \cap \bigcup \mathcal{E}_\xi) \neq \emptyset \text{ pro } \xi < \kappa).$$

Buď $\sigma : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{T} \setminus \{\emptyset\})^n \to \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ zobrazení svědčící, že X je slabě α-favorabilní. Podobně jako v důkaze Lemmatu 5.1 sestrojíme pro $s \in \kappa^{<\omega}$ neprázdné otevřené množiny $G_s \subset G = \operatorname{int} \bigcup \mathcal{E}$ a $\mathcal{E}_s \subset \mathcal{E}$, aby, položíme-li $H_s = \sigma(G_{s\restriction 0}, ..., G_s)$, platilo:

(i) $(\mathcal{E}_{s^\frown\xi})_{\xi<\kappa}$ je disjunktní rozklad $\mathcal{E}_s$,
(ii) $\operatorname{int}(H_s \cap \bigcup \mathcal{E}_{s^\frown\xi}) \neq \emptyset$ pro $\xi < \kappa$,
(iii) $G_{s^\frown\xi} = \operatorname{int}(H_s \cap \bigcup \mathcal{E}_{s^\frown\xi}))$ pro $\xi < \kappa$.

Opět položíme $\mathcal{E}_\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_{\alpha\restriction n}$ pro $\alpha \in \kappa^\omega$ a stejně dokážeme, že $\mathcal{E}_\alpha$ jsou po dvou disjunktní a všechny neprázdné, tedy $\kappa = \operatorname{card} \mathcal{E} \geq \kappa^\omega$. □

Věta 5.3. *(i) Je-li X slabě α-favorabilní, pak má vlastnost (S_κ) pro $\kappa < 2^{\aleph_0}$.*

(ii) Je-li X dědičně slabě α-favorabilní, pak X je κ-PCP-prostor pro $\kappa < 2^{\aleph_0}$.

Důkaz. Tvrzení (i) plyne z Lemmatu 5.1 a tvrzení (ii) z tvrzení (i) a Tvrzení 2.1. □

Věta 5.4. *(i) Je-li X slabě α-favorabilní a $\pi w(X) \leq 2^{\aleph_0}$, pak X má vlastnost (S).*

(ii) Je-li X dědičně slabě α-favorabilní a je-li splněna jedna z podmínek

(a) X má těsnost $< 2^{\aleph_0}$,
(b) $\pi w(F) \leq 2^{\aleph_0}$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou,
(c) $\chi(X) \leq 2^{\aleph_0}$,
(d) X má silnou těsnost $\leq 2^{\aleph_0}$,

je X PCP-prostor.

Důkaz. (i) Podle Věty 5.3.(i) má X vlastnost (S_κ) pro $\kappa < 2^{\aleph_0}$, podle Tvrzení 2.4 má pak vlastnost (S).

(ii) Podle Věty 5.3.(ii) je X κ-PCP-prostor pro $\kappa < 2^{\aleph_0}$, podle Tvrzení 2.2 resp. 2.4 resp. 2.6 resp 2.8 (podle toho, která z podmínek (a)-(d) je splněna) je X PCP-prostor. □

Věta 5.5. *(i) Je-li X slabě α-favorabilní a $c(X) < 2^{\aleph_0}$, pak X má vlastnost (S_κ) pro κ menší než nejmenší slabě nedosažitelný kardinál.*

(ii) Je-li X dědičně slabě α-favorabilní a $c(F) < 2^{\aleph_0}$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou, pak X je κ-PCP-prostor pro κ menší než nejmenší slabě nedosažitelný kardinál.

Důkaz. (i) Nechť κ je nejmenší kardinál takový, že X nemá vlastnost (S_κ), a nechť κ je menší než nejmenší slabě nedosažitelný kardinál. Podle Věty 5.3.(i) je $\kappa \geq 2^{\aleph_0}$, podle Lemmatu 2.10 je $\kappa \leq c(X)$, což je spor.

Tvrzení (ii) plyne okamžitě z (i) a Tvrzení 2.1. $\square$

Věta 5.6. *Nechť κ_0 je nejmenší slabě nedosažitelný kardinál.*

(i) Je-li X slabě α-favorabilní a $c(X) < 2^{\aleph_0}$ a $\pi w(X) \leq \kappa_0$, pak X má vlastnost (S).

(ii) Je-li X dědičně slabě α-favorabilní a $c(F) < 2^{\aleph_0}$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou, a je-li splněna jedna z podmínek

(a) X má těsnost $< \kappa_0$,
(b) $\pi w(F) \leq \kappa_0$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou,
(c) $\chi(X) \leq \kappa_0$,
(d) X má silnou těsnost $\leq \kappa_0$,

pak X je PCP-prostor.

Důkaz. (i) Podle Věty 5.5.(i) má X vlastnost (S_κ) pro $\kappa < \kappa_0$, podle Tvrzení 2.4 má X vlastnost (S).

(ii) Podle Věty 5.5.(ii) je X κ-PCP-prostor pro $\kappa < \kappa_0$. Podle Tvrzení 2.2 resp. 2.4 resp. 2.6 resp. 2.8 (podle toho, která z podmínek (a)-(d) je splněna) je pak X PCP-prostor. $\square$

Poznámky. (1) Opět ve Větách 5.4 a 5.6 podmínka (a) implikuje podmínku (d), tedy tvrzení pro (a) je speciálním případem tvrzení pro (d).

(2) Za hypotézy kontinua Věty 5.3 až 5.6 nedávají nic nového. Věta 5.3 pak říká pouze, že slabě α-favorabilní prostory jsou Baireovy a dědičně slabě α-favorabilní prostory jsou dědičně Baireovy. Věty 5.4 až 5.6 jsou pak důsledkem tvrzení 2. kapitoly. Avšak za negace hypotézy kontinua dostáváme, že dědičně slabě α-favorabilní prostory jsou $\aleph_1$-PCP-prostory, a mají-li těsnost $\leq \aleph_1$ (charakter $\leq \aleph_2, \ldots$), jsou to PCP-prostory; a že dědičně slabě α-favorabilní prostory splňující $c(F) \leq \aleph_1$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou a jednu z podmínek (a)-(d) ve Větě 5.6.(ii) jsou PCP-prostory.

(3) Věty 5.4.(i) a 5.4.(ii)(b) jsou také důsledkem Věty 7J(a) v [8], která za těchže předpokladů jako Věta 5.4.(i) uvádí silnější tvrzení, jehož si všimneme v 6.kapitole. Věta 5.3, jakož ani Věta 5.4.(ii)(a), (c), (d), však důsledkem této věty není.

(4) Za předpokladu neexistence slabě nedosažitelných kardinálů jsou všechny dědičně slabě α-favorabilní prostory splňující $c(F) < 2^{\aleph_0}$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou PCP-prostory. Za hypotézy kontinua je to důsledkem tvrzení kapitoly 2, nebo také Věty 7J(b) v [8], nikoli však za její negace.

6. JEMNÉ TOPOLOGIE A BP-ADITIVNÍ SYSTÉMY

Buď X topologický prostor, $\mathcal{N}$ nějaký ideál podmnožin X. Řekneme, že $\mathcal{N}$ je *lokalizovatelný*, splňuje-li podmínku

$$(\forall A \subset X)[(\forall x \in A)(\exists G \subset X)(\text{G otevřená}, x \in G,\ G \cap A \in \mathcal{N}) \Rightarrow A \in \mathcal{N}].$$

Snadno ověříme, že ideál všech řídkých množin je lokalizovatelný. Banachův lokalizační princip pak říká, že σ-ideál všech množin první kategorie v X je lokalizovatelný. Je-li $\mathcal{N}$ ideál, značíme $\mathcal{N}_\sigma$ jím generovaný σ-ideál. Jsou-li $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ dva ideály, značíme $\mathcal{N} \vee \mathcal{M}$ ideál generovaný $\mathcal{N} \cup \mathcal{M}$.

Lemma 6.1. *Buď $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor, $\mathcal{N}$ lokalizovatelný ideál, $\mathcal{S}$ ideál řídkých množin v X. Položme $\mathcal{R} = \{G \setminus N \mid G \in \mathcal{T}, N \in \mathcal{N}\}$. Pak*

(a) $(\mathcal{N} \vee \mathcal{S})_\sigma$ je lokalizovatelný;

(b) $\mathcal{R}$ je topologie.

Pokud navíc $\mathcal{T} \cap (\mathcal{N} \vee \mathcal{S}) = \{\emptyset\}$, pak

(c) $A \subset X$ je $\mathcal{R}$-řídká, právě když $A \in \mathcal{N} \vee \mathcal{S}$, je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$, pak navíc každá $\mathcal{R}$-řídká množina je $\mathcal{R}$-uzavřená;

(d) $(X, \mathcal{R})$ je Baireův, právě když $\mathcal{T} \cap (\mathcal{N} \vee \mathcal{S})_\sigma = \{\emptyset\}$, je-li navíc $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$, je $(X, \mathcal{R})$ dědičně Baireův;

(e) je-li $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}_\sigma$, pak $A \subset X$ má $\mathcal{T}$-BP, právě když má $\mathcal{R}$-BP;

(f) je-li $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}$, pak $\mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ tvoří pseudobázi $\mathcal{R}$, tedy speciálně $\pi w(X, \mathcal{R}) = \pi w(X, \mathcal{T})$, navíc $A \subset X$ má $\mathcal{T}$-SBP, právě když má $\mathcal{R}$-SBP;

(g) je-li $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}$ a $(X, \mathcal{T})$ je (slabě) α-favorabilní, pak $(X, \mathcal{R})$ je (slabě) α-favorabilní;

(h) $c(X, \mathcal{T}) = c(X, \mathcal{R})$.

Důkaz. (a) Označme $\mathcal{M} = (\mathcal{N} \vee \mathcal{S})_\sigma$. Buď $A \subset X$ taková, že pro každé $x \in A$ existuje $G \in \mathcal{T}$, že $x \in G$ a $G \cap A \in \mathcal{M}$. Buď $\mathcal{G}$ maximální disjunktní systém otevřených množin takový, že pro každé $G \in \mathcal{G}$ je $\emptyset \neq G \cap E \in \mathcal{M}$. Pak $R = A \setminus \bigcup \mathcal{G}$ je řídká, (což plyne z předpokladu na A a z maximality $\mathcal{G}$), a tedy je prvkem $\mathcal{M}$. Dále pro $G \in \mathcal{G}$ buď $A \cap G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{G,n}$, kde $N_{G,n} \in \mathcal{N} \vee \mathcal{S}$. Protože $\mathcal{N} \vee \mathcal{S}$ je zřejmě lokalizovatelný, je $N_n = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} N_{G,n}$ prvek $\mathcal{N} \vee \mathcal{S}$, tedy $A = R \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ je prvek $\mathcal{M}$.

(b) Zřejmě $\emptyset, X \in \mathcal{R}$. Navíc, protože $\mathcal{N}$ je ideál, je $\mathcal{R}$ uzavřená na konečné průniky. Zbývá dokázat uzavřenost na libovolné sjednocení. Nechť $R_i, i \in I$ jsou prvky $\mathcal{R}$. Pak $R_i = G_i \setminus N_i$, kde $G_i \in \mathcal{T}$, $N_i \in \mathcal{N}$. Položme $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, $N = G \setminus \bigcup_{i \in I} R_i$. Pak $G \in \mathcal{T}$. Buď $x \in N$. Pak existuje $i \in I$, že $x \in G_i$. Pak $G_i \cap N \subset N_i$, tedy (protože $\mathcal{N}$ je lokalizovatelný) je $N \in \mathcal{N}$. Tedy $\bigcup_{i \in I} R_i = G \setminus N$ je prvek $\mathcal{R}$.

Dále předpokládejme, že $(\mathcal{S} \vee \mathcal{N}) \cap \mathcal{T} = \{\emptyset\}$.

(c) Je-li $A \in \mathcal{N} \vee \mathcal{S}$, pak $A = N \cup S$, kde $N \in \mathcal{N}$ a $S \in \mathcal{S}$. Zřejmě $\bar{A}^{\mathcal{R}} = N \cup \bar{S}^{\mathcal{R}} \subset N \cup \bar{S}^{\mathcal{T}}$. Je-li $G \in \mathcal{T}$, $P \in \mathcal{N}$ a $G \setminus P \subset \bar{A}^{\mathcal{R}}$, pak $G \subset P \cup N \cup \bar{S}^{\mathcal{T}}$, tedy $G \in \mathcal{N} \vee \mathcal{S}$, tedy $G = \emptyset$, tedy $\operatorname{int}_{\mathcal{R}} \bar{A}^{\mathcal{R}} = \emptyset$, tedy A je $\mathcal{R}$-řídká.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Obráceně, nechť A je $\mathcal{R}$-řídká. Pak existuje $H \in \mathcal{R}$, $H \subset X \setminus A$ taková, že H je $\mathcal{R}$-hustá v X. Tedy $H = G \setminus N$, kde $G \in \mathcal{T},\ N \in \mathcal{N}$. Pak G je $\mathcal{T}$-hustá v X a $A \subset N \cup (X \setminus G)$ je prvkem $\mathcal{N} \vee \mathcal{S}$.

Zbývající část tvrzení plyne z toho, že každý prvek $\mathcal{N}$ je $\mathcal{R}$-uzavřený.

(d) Podle (c) je $A \subset X$ množina $\mathcal{R}$-první kategorie, právě když $A \in (\mathcal{N} \vee \mathcal{S})_\sigma$. Pokud existuje $G \in (\mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}) \cap (\mathcal{N} \vee \mathcal{S})_\sigma$, pak $G \in \mathcal{R} \setminus \{\emptyset\}$ a G je $\mathcal{R}$-první kategorie, tedy $(X, \mathcal{R})$ není Baireův. Naopak, není-li $(X, \mathcal{R})$ Baireův, existuje $H \in \mathcal{R} \setminus \{\emptyset\}$, která je $\mathcal{R}$-první kategorie, tedy $H \in (\mathcal{N} \vee \mathcal{S})_\sigma$. Podle definice $H = G \setminus N$, kde $G \in \mathcal{T},\ N \in \mathcal{N}$, pak $G \in (\mathcal{N} \vee \mathcal{S})_\sigma$.

Nyní nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$. Buď $F \subset X$ $\mathcal{R}$-uzavřená. Pak $F = \operatorname{int}_\mathcal{R} F \cup \operatorname{bd}_\mathcal{R} F$, kde $\operatorname{int}_\mathcal{R} F$ je $\mathcal{R}$-otevřená, a tedy je Baireův prostor. Každá podmnožina $\operatorname{bd}_\mathcal{R} F$ je $\mathcal{R}$-řídká, tedy podle (c) uzavřená, tedy $\operatorname{bd}_\mathcal{R} F$ je diskrétní, a tedy Baireův prostor. Podle Lemmatu 3.4.(ii) je F Baireův prostor.

(e) Nechť $A \subset X$ má $\mathcal{T}$-BP. Pak existují $G \in \mathcal{T}$ a $N \in S_\sigma$, že $A = G \vartriangle N$. Protože $G \in \mathcal{R}$ a podle (c) je N množina $\mathcal{R}$-první kategorie, tedy A má $\mathcal{R}$-BP.

Obráceně, nechť $A \subset X$ má $\mathcal{R}$-BP. Tedy $A = G \vartriangle N$, kde $G \in \mathcal{R}$ a $N \in \mathcal{S}_\sigma$. Dále $G = H \setminus P$, kde $H \in \mathcal{T}$ a $P \in \mathcal{N}$. Tedy $A = (H \setminus P) \vartriangle N$, tedy má $\mathcal{T}$-BP

(f) Je-li $G \in \mathcal{R} \setminus \{\emptyset\}$, pak $G = H \setminus N$, kde $H \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ a $N \in \mathcal{N}$, speciálně N je $\mathcal{T}$-řídká, tedy $\operatorname{int}_\mathcal{T}(H \setminus N) \neq \emptyset$, což dokazuje, že $\mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ je pseudobáze $\mathcal{R}$. Odtud okamžitě plyne rovnost pseudovah.

Má-li A $\mathcal{T}$-SBP, má zřejmě i $\mathcal{R}$-SBP. Obráceně, nechť $A \subset X$ má $\mathcal{R}$-SBP. Pak $A = G \cup N$, kde $G \in \mathcal{R}$ a $N \in S_\sigma$. Podle definice je $G = H \setminus P$, kde $H \in \mathcal{T}$ a $P \in \mathcal{N}$. Speciálně P je $\mathcal{T}$-řídká, a tedy $P \cap H$ je $\mathcal{T}$-řídká v H, tedy $K = \operatorname{int}_\mathcal{T}(H \setminus P)$ je $\mathcal{T}$-hustá v H, tedy $G \setminus K$ je $\mathcal{T}$-řídká. Protože $A = K \cup (G \setminus K) \cup N$, má A $\mathcal{T}$-SBP.

(g) Podle (f) je $\mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ pseudobází pro $\mathcal{R}$. Tedy existuje $\phi : \mathcal{R} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, že $\phi(G) \subset G$ pro každé G. Je-li $(X, \mathcal{T})$ α-favorabilní a $\tau : \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ zobrazení o tom svědčící, pak $\tau \circ \phi$ je takové zobrazení pro $(X, \mathcal{R})$.

Je-li $(X, \mathcal{T})$ slabě α-favorabilní a $\sigma : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{T} \setminus \{\emptyset\})^n \to \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ zobrazení o tom svědčící, je σ' definované předpisem $\sigma'(G_1, ..., G_n) = \sigma(\phi(G_1), ..., \phi(G_n))$ takovým zobrazením pro $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ (pokud $G_n \in \mathcal{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$ tak, že $G_{n+1} \subset \sigma'(G_1, ..., G_n)$ pro každé n, pak $\phi(G_{n+1}) \subset \sigma(\phi(G_1), ..., \phi(G_n))$ pro všechna n, tedy $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi(G_n) \neq \emptyset$).

(h) Že $c(X, \mathcal{T}) \le c(X, \mathcal{R})$ je zřejmé, neboť $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$. Obráceně, jsou-li $G_1, G_2 \in \mathcal{R}$ disjunktní a $G_i = H_i \setminus N_i$, kde $H_i \in \mathcal{T},\ N_i \in \mathcal{N}$ pro $i = 1, 2$, pak $H_1 \cap H_2 \subset (G_1 \cap G_2) \cup N_1 \cup N_2 = N_1 \cup N_2$, tedy $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Proto, jsou-li $(G_i)_{i \in I}$ po dvou disjunktní prvky $\mathcal{R}$, existují $H_i \in \mathcal{T},\ H_i \supset G_i$ tak že $(H_i)_{i \in I}$ jsou po dvou disjunktní. Jinými slovy, $c(X, \mathcal{R}) \le c(X, \mathcal{T})$. Vidíme, že místo $\mathcal{T} \cap (\mathcal{N} \vee \mathcal{S}) = \{\emptyset\}$ by stačilo předpokládat $\mathcal{T} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. □

Poznámka. Z Lemmatu 2O v [8] plyne, že v (g) lze (pro slabě α-favorabilní prostory) nahradit podmínku $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}$ podmínkou $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}_\sigma$. Důkaz je ovšem poněkud složitější.

Protože se budeme blíže zabývat topologiemi, které vzniknou způsobem popsaným v předchozím lemmatu, zavedeme nějaké značení. Je-li $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor, $Y \subset X$ a $\mathcal{P}$ nějaký systém podmnožin X, značíme

$$\mathcal{P}_Y = \{P \cap Y, P \in \mathcal{P}\},$$

speciálně tedy $\mathcal{T}_Y$ je topologie podprostoru na Y. Dále $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ či krátce $\mathcal{S}$ budeme rozumět ideál všech řídkých podmnožin X, $\mathcal{S}_\sigma(\mathcal{T})$ resp. $\mathcal{S}_\sigma$ pak σ-ideál množin první kategorie. Je-li $\mathcal{N}$ nějaký lokalizovatelný ideál podmnožin X, pak $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ značíme topologii $\mathcal{R}$ definovanou v předchozím lemmatu.

Z předchozího lemmatu rovněž plyne, že pokud $(X, \mathcal{T})$ je Baireův, je $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}_\sigma))$ dědičně Baireův a navíc oba prostory mají tytéž množiny první kategorie i množiny s Baireovou vlastností. Navíc, protože v $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}_\sigma))$ jsou všechny množiny první kategorie uzavřené, jsou všechny množiny s BP již H-množiny. To nás vede k následující definici:

Řekneme, že topologický prostor X má *vlastnost* (B_κ), kde κ je nekonečný kardinál, pokud sjednocení každého úplně BP-aditivního systému množin první kategorie v X, jehož mohutnost je nejvýš κ, je první kategorie v X. Řekneme, že X má *vlastnost (B)*, má-li vlastnost (B_κ) pro každé κ.

Lemma 6.2. *Buď $(X, \mathcal{T})$ Baireův prostor, $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}_\sigma$ buď lokalizovatelný ideál, κ buď nekonečný kardinál. Pak:*

(i) $(X, \mathcal{T})$ má vlastnost (B_κ), právě když ji má $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$.

(ii) Má-li $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}_\sigma))$ vlastnost (H_κ), má $(X, \mathcal{T})$ vlastnost (B_κ).

(iii) Má-li $(X, \mathcal{T})$ vlastnost (B_κ) a je-li $\mathcal{N} \supset \mathcal{S}$, je $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ κ-PCP-prostor.

Důkaz. Tvrzení (i) plyne z toho, že oba prostory mají stejné množiny první kategorie i množiny s Baireovou vlastností (podle (c) a (e) v Lemmatu 6.1.)

(ii) Je-li $\mathcal{E}$ úplně BP-aditivní systém množin první kategorie v $(X, \mathcal{T})$, jehož mohutnost je nejvýš κ, pak $\mathcal{E}$ je úplně H-aditivní v $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}_\sigma))$ a i v této topologii je tvořený množinami první kategorie, tedy $\bigcup \mathcal{E}$ má prázdný vnitřek, a tedy je první kategorie v $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}_\sigma))$, tedy i v $(X, \mathcal{T})$.

(iii) Buď $\emptyset \neq F \subset X$ $\mathcal{T}(\mathcal{N})$-uzavřená množina. Pak $F = \operatorname{int}_{\mathcal{T}(\mathcal{N})} F \cup \operatorname{bd}_{\mathcal{T}(\mathcal{N})} F$. První množina je $\mathcal{T}(\mathcal{N})$-otevřená, a tedy má vlastnost (H_κ) (protože $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ má vlastnost (B_κ) a tedy tím spíše (H_κ)), druhá množina je $\mathcal{T}(\mathcal{N})$-řídká, tedy diskrétní (podle Lemmatu 6.1.(c) je každá její podmnožina uzavřená), tedy má vlastnost (H). Podle Tvrzení 3.7.(ii) pak F má vlastnost (H_κ). Tedy podle Tvrzení 2.1 je $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ κ-PCP-prostor. □

Snadným důsledkem je následující věta:

Věta 6.3. *Buď κ nekonečný kardinál. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) Existuje (Hausdorffův) topologický prostor, který nemá vlastnost (B_κ).

(ii) Existuje Baireův (Hausdorffův) topologický prostor, který nemá vlastnost (B_κ).

(iii) Existuje Baireův (Hausdorffův) topologický prostor, v němž existuje úplně SBP-aditivní systém množin první kategorie mohutnosti nejvýš κ, jehož sjednocení má neprázdný vnitřek.

(iv) Existuje Baireův (Hausdorffův) topologický prostor, v němž existuje úplně BPR-aditivní systém množin první kategorie mohutnosti nejvýš κ, jehož sjednocení je druhé kategorie.

(v) Existuje Baireův (Hausdorffův) topologický prostor, který nemá vlastnost (S_κ).

(vi) Existuje Baireův (Hausdorffův) topologický prostor, který nemá vlastnost (H_κ).

(vii) Existuje dědičně Baireův (Hausdorffův) topologický prostor, který není κ-PCP-prostor.

Důkaz. Implikace $(vii) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ a $(v) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii)$ jsou zřejmé.

Implikace $(i) \Rightarrow (ii)$ plyne z Banachova lokalizačního principu: Prostor X se dá napsat $X = Y \cup N$, kde Y je uzavřený Baireův podprostor X a N je otevřená množina první kategorie v sobě. Pak $\bar{N} = N \cup \operatorname{bd} N$ je první kategorie v X, a tedy i v sobě, a $\operatorname{int} Y$ je Baireův prostor. Je-li $\mathcal{E}$ úplně BP-aditivní systém množin první kategorie v X, jehož sjednocení je druhé kategorie, pak X je druhé kategorie v sobě, a tedy $\operatorname{int} Y \neq \emptyset$ a $\mathcal{E}_{\operatorname{int}} Y$ je úplně BP-adtitivní systém množin první kategorie v $\operatorname{int} Y$ (a jeho mohutnost je nejvýš $\operatorname{card} \mathcal{E}$.

Implikace $(ii) \Rightarrow (vii)$ pak plyne z Lemmatu 6.2: Nechť $(X, \mathcal{T})$ je Baireův prostor, který nemá vlastnost (B_κ). Pak $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}_\sigma))$ je dědičně Baireův (Lemma 6.1.(d)) a nemá vlastnost (H_κ) (Lemma 6.2.(ii)), tedy podle Tvrzení 2.1. není $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}_\sigma))$ κ-PCP-prostor.

Rovněž vidíme, že ekvivalence platí i s předpokladem, že prostor je Hausdorffův. Pro implikaci $(i) \Rightarrow (ii)$ to plyne z toho, že podprostor Hausdorffova prostoru je Hausdorffův, v důkazu implikace $(ii) \Rightarrow (vii)$ se konstruuje jemnější topologie, a zjemníme-li topologii na Hausdorffově prostoru, nová topologie bude opět Hausdorffova. Pro ostaní implikace (uvedené výše) je to zřejmé, neboť pro jejich důkaz není třeba konstruovat nový prostor. $\square$

Poznámky. (1) Z Lemmatu 6.1.(h) plyne, že podmínky (ii)-(vi) předchozího tvrzení zůstanou ekvivalentní, přidáme-li ke všem stejnou podmínku na Suslinovo číslo (např. $c(X) \leq \tau$ nebo $c(X) < \tau$ pro nějaké τ.) Z poznámky za Lemmatem 6.1 dále plyne, že podmínky (ii)-(vi) zůstanou ekvivalentní, nahradíme-li předpoklad, že prostor je Baireův předpokladem, že je slabě α-favorabilní. Tedy z dokázaných tvrzení o vlastnostech (S_κ) plynou analogická tvrzení o vlastnostech (B_κ). Konkrétně, z Věty 2.11.(i) plyne, že je-li X Baireův a $c(X) \leq \aleph_0$, pak X má vlastnost (B_κ) pro κ menší než nejmenší slabě nedosažitelný kardinál. Z Věty 5.3.(i) plyne, že všechny slabě α-favorabilní prostory mají vlastnost (B_κ) pro $\kappa < 2^{\aleph_0}$. Podle Věty 5.5.(i) platí, že je-li X slabě α-favorabilní a $c(X) < 2^{\aleph_0}$, pak X má vlastnost (B_κ) pro κ menší než nejmenší slabě nedosažitelný kardinál. Tedy speciálně, za předpokladu neexistence slabě nedosažitelných kardinálů všechny Baireovy prostory X splňující $c(X) \leq \aleph_0$ a všechny slabě α-favorabilní prostory X splňující $c(X) < 2^{\aleph_0}$ mají vlastnost (B), což doplňuje řadu tvrzení v [8].

(2) Předchozí věta speciálně říká, že všechny dědičně Baireovy prostor jsou PCP-prostory, právě když všechny prostory mají vlastnost (B). Věta 7G v [8] říká, že za axiomu konstruovatelnosti mají všechny prostory vlastnost (B). Z Věty 3.3 v [9] plyne, že je-li konsistentní předpokládat, že existuje topologický prostor nemající vlastnost (B), je již konsistentní předpokládat, že existuje měřitelný kardinál. Naopak za předpokladu existence měřitelného kardinálu (nebo reálně měřitelného kardinálu $\leq 2^{\aleph_0}$) existují příklady prostorů bez vlastnosti (B). Tedy i předpoklad existence dědičně Baireova prostoru, který není PCP-prostor, je ekvikonsistentní existenci měřitelného kardinálu (a tedy i existenci reálně měřitelného kardinálu $\leq 2^{\aleph_0}$ - viz Příklad 7.1).

Vlastnosti (B) je věnována pozornost v [8], kde se tato vlastnost nazývá AF_1. Shrneme zde některé výsledky:

Tvrzení 6.4. *Buď X topologický prostor.*

(i) ([8, Důsledek 7F(a)]*) Pokud $\pi w(X) \leq \aleph_0$, pak X má vlastnost (B).*

(ii) ([8, Věta 7J(a)]*) Je-li X slabě α-favorabilní a $\pi w(X) \leq 2^{\aleph_0}$, pak X má vlastnost (B).*

(iii) ([8, Věta 7J(b)]*) Je-li X slabě α-favorabilní a $c(X) \leq \aleph_0$, pak X má vlastnost (B_κ) pro κ menší než nejmenší měřitelný kardinál.*

(iv) ([8, Tvrzení 7N(a)]*) Je-li X skoro čechovsky úplný a $c(X) \leq \aleph_0$, pak X má vlastnost (B).*

Poznámky. (1) Věta 7J(b) v [8] je formulována jinak - říká, že za předpokladu neexistence měřitelných kardinálů všechny prostory slpňující předpoklady (iii) mají vlastnost (B). Ale ve skutečnosti je dokázáno tvrzení (iii).

(2) Tvrzení 7N(a) v [8] je formulováno pro čechovsky úplné prostory, ale je vidět, že platí i pro skoro čechovsky úplné prostory. Snadno si totiž uvědomíme, že je-li Y reziduální podmnožina X, pak X má vlastnost (B_κ), právě když Y má vlastnost (B_κ).

(3) Výsledky o vlastnosti (B) lze využít k formulaci vět o PCP-prostorech dvěma způsoby - jednak s použitím Lemmatu 6.2.(iii), což udělá Tvrzení 6.7, a jednak s použi- tím Tvrzení 2.1 a faktu, že Baireův prostor, který má vlastnost (B_κ), má i vlastnost (H_κ). Druhý způsob pro případ (i) nedává nic nového, protože Věta 2.5 je silnějším tvrzením, pro případ (ii) dává Větu 5.4.(i) a 5.4.(ii)(b). Zbylé případy jsou obsahem následujícího tvrzení.

Věta 6.5. *Buď X topologický prostor takový, že $c(F) \leq \aleph_0$ pro každou $F \subset X$ neprázdnou uzavřenou.*

(i) Je-li X dědičně slabě α-favorabilní, pak X je κ-PCP-prostor pro každé κ menší než nejmenší měřitelný kardinál.

(ii) Je-li X dědičně Baireův a má BPR v nějaké své kompaktifikaci, pak X je PCP-prostor.

Důkaz. (i) Plyne z Tvrzení 6.4.(iii) a Tvrzení 2.1.

(ii) Podle Lemmatu 4.6 je každý neprázdný uzavřený podprostor X skoro čechovsky úplný, tedy podle Tvrzení 6.4.(iv) má vlastnost (B), tím spíše vlastnost (H), a tedy podle Tvrzení 2.1 je X PCP-prostor. $\square$

Poznámka. Tvrzení (ii) pro H-úplné prostory je zmíněno v poznámce za Větou 4.12 v [3]. Přitom důkaz pro dědičně Baireovy prostory mající BPR v nějaké kompaktifikaci je naprosto stejný.

Věta 6.6. *Nechť κ_0 je nejmenší měřitelný kardinál.*

(i) Je-li X slabě α-favorabilní, je-li $c(X) \leq \aleph_0$ a $\pi w(X) \leq \kappa_0$, pak X má vlastnost (S).

(ii) Je-li X dědičně slabě α-favorabilní, je-li $c(F) \leq \aleph_0$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou a je-li splněna jedna z podmínek

(a) X má těsnost $< \kappa_0$,
(b) $\pi w(F) \leq \kappa_0$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou,
(c) $\chi(X) \leq \kappa_0$,
(d) X má silnou těsnost $\leq \kappa_0$,

pak X je PCP-prostor.

Důkaz. (i) Podle Tvrzení 6.4.(iii) má X vlastnost (B_κ), a tím spíše (S_κ), pro $\kappa < \kappa_0$. Podle Tvrzení 2.4 pak X má vlastnost (S).

(ii) Podle Věty 6.5.(i) je X κ-PCP-prostor pro $\kappa < \kappa_0$. Podle Tvrzení 2.2 resp. 2.4 resp. 2.6 resp. 2.8 (podle toho, která z podmínek (a)-(d) je splněna) je pak X PCP-prostor. $\square$

Poznámky. (1) Opět podmínka (a) implikuje podmínku (d), tedy tvrzení pro (a) je speciálním případem tvrzení pro (d).

(2) Za předpokladu neexistence měřitelných kardinálů mají všechny slabě α-favorabil- ní prostory X splňující $c(X) \leq \aleph_0$ vlastnost (S) a všechny dědičně slabě α-favorabilní prostory takové, že pro každou jejich neprázdnou uzavřenou podmnožinu F je $c(F) \leq \aleph_0$, jsou PCP-prostory. Toto je též přímým důsledkem Věty 7J(b) v [8].

Tvrzení 6.7. *Buď $(X, \mathcal{T})$ Baireův prostor a $\mathcal{N}$ lokalizovatelný ideál podmnožin X, který splňuje $\mathcal{S} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{S}_\sigma$.*

(i) Pokud $\pi w(X, \mathcal{T}) \leq \aleph_0$, je $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ PCP-prostor.

(ii) Pokud $(X, \mathcal{T})$ je slabě α-favorabilní a $\pi w(X, \mathcal{T}) \leq 2^{\aleph_0}$, je $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ PCP-prostor.

(iii) Pokud $(X, \mathcal{T})$ je slabě α-favorabilní a $c(X, \mathcal{T}) \leq \aleph_0$, je $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ κ-PCP-prostor pro κ menší než nejmenší měřitelný kardinál.

(iv) Pokud $(X, \mathcal{T})$ je skoro čechovsky úplný a $c(X, \mathcal{T}) \leq \aleph_0$, pak $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ je PCP-prostor.

Důkaz. Plyne z Tvrzení 6.4 a Lemmatu 6.2.(iii). □

Poznámka. O tom, že v (iii) nelze vynechat podmínku na κ, svědčí Příklad 7.4 a o tom, že v (iv) nelze vynechat podmínku na Suslinovo číslo (za předpokladu existence měřitelného kardinálu) zase Příklad 7.5.

Tvrzení 6.8. *Nechť κ_0 je nejmenší měřitelný kardinál. Buď $(X, \mathcal{T})$ slabě α-favorabilní prostor splňující $c(X, \mathcal{T}) \leq \aleph_0$. Buď $\mathcal{N}$ lokalizovatelný ideál, pro který $\mathcal{S} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{S}_\sigma$. Je-li splněna jedna z podmínek*

(a) $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ má těsnost $< \kappa_0$,

(b) $\pi w(X, \mathcal{T}(\mathcal{N})) \leq \kappa_0$,

(c) $\chi(X, \mathcal{T}(\mathcal{N})) \leq \kappa_0$,

(d) $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ má silnou těsnost $\leq \kappa_0$,

pak $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ je PCP-prostor.

Důkaz. Podle Tvrzení 6.4.(iii) má $(X, \mathcal{T})$ vlastnost (B_κ) pro $\kappa < \kappa_0$, podle Lemmatu 6.2.(iii) je $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ κ-PCP-prostor pro $\kappa < \kappa_0$. Je-li splněna jedna z podmínek (a), (c), (d), pak podle Tvrzení 2.2 resp. 2.6 resp. 2.8 je $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ PCP-prostor. Je-li splněna podmínka (b), pak podle poznámky za Tvrzením 2.4 má $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ vlastnost (H). Je-li nyní F uzavřená podmnožina $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$, pak, pokud je řídká, je diskrétní, a tedy má vlastnost (H), jinak lze psát $F = \operatorname{int} F \cup \operatorname{bd} F$, kde $\operatorname{int} F$ je otevřená, a tedy má vlastnost (H) (Lemma 3.6.(iv)), $\operatorname{bd} F$ je řídká, tedy diskrétní, a tedy má vlastnost (H), tedy podle Tvrzení 3.7.(ii) má F vlastnost (H). Podle Tvrzení 2.1 je pak $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ PCP-prostor. □

Poznámky. (1) Podmínka (a) implikuje podmínku (d), tedy tvrzení pro (a) je speciálním případem tvrzení pro (d).

(2) Za předpokladu neexistence měřitelných kardinálů všechny prostory vzniklé popsaným způsobem jsou PCP-prostory.

(3) Obecně lze těžko ověřovat kteroukoli z podmínek (a)-(d). Jestliže však $\operatorname{card} X < \kappa_0$, je podmínka (a) triviálně splněna. Pokud $\mathcal{N} = \mathcal{S}$, lze podmínku (b) nahradit ekvivalentní podmínkou $\pi w(X, \mathcal{T}) \leq \kappa_0$ (Lemma 6.1.(f)).

Poznámka 6.9. *Je-li* $(X, \mathcal{T})$ *topologický prostor a* $\mathcal{N}$ *lokalizovatelný ideál, pro nějž* $\mathcal{N} \cap \mathcal{T} = \{\emptyset\}$, *pak* $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ *je regulární, právě když* $(X, \mathcal{T})$ *je regulární a všechny prvky* $\mathcal{N}$ *jsou* $\mathcal{T}$*-uzavřené.*

Důkaz. Implikace „$\Leftarrow$" plyne z toho, že pokud prvky $\mathcal{N}$ jsou uzavřené, je $\mathcal{T}(\mathcal{N}) = \mathcal{T}$.

Obráceně nechť existuje $N \in \mathcal{N}$ taková, že $N \neq \bar{N}$. Zvolme $x \in \bar{N} \setminus N$. Všimněme si, že pro $G \in \mathcal{T}$ a $P \in \mathcal{N}$ platí $\overline{G \setminus P}^{\mathcal{T}(\mathcal{N})} = \bar{G}^{\mathcal{T}}$.

Inkluze „$\subset$" je zřejmá. Pro důkaz obrácené inkluze zvolme $y \in \bar{G}^{\mathcal{T}}$ a $H \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$ pro kterou $y \in H$. Pak $H = K \setminus L$, kde $K \in \mathcal{T}, L \in \mathcal{N}$. Pak $K \cap G \neq \emptyset$, a tedy $H \cap (G \setminus P) = (K \cap G) \setminus (P \cup L) \neq \emptyset$, tedy $y \in \overline{G \setminus P}^{\mathcal{T}(\mathcal{N})}$.

Nyní $x \in X \setminus N \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$. Je-li $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ regulární, existují $H \in \mathcal{T}$, $P \in \mathcal{N}$, že $x \in H \setminus P \subset \overline{H \setminus P}^{\mathcal{T}(\mathcal{N})} \subset X \setminus N$. Pak podle předchozího $\bar{H}^{\mathcal{T}} \subset X \setminus N$, ale $x \in \bar{N}$ a $x \in H$, tedy $H \cap N \neq \emptyset$, což je spor. Tedy je-li $(X, \mathcal{T}(\mathcal{N}))$ regulární, pak $\mathcal{N}$ je tvořeno $\mathcal{T}$-uzavřenými množinami, tedy $\mathcal{T}(\mathcal{N}) = \mathcal{T}$ a $(X, \mathcal{T})$ je regulární. $\square$

7. PŘÍKLADY

Příklad 7.1. *(*[3, Příklad 2.4.(2)]*) Nechť existuje reálně měřitelný kardinál $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$, (t.j., nechť existuje netriviální $\sigma-$aditivní míra definovaná na všech podmnožinách [0,1], která je nulová na jednobodových množinách.) Pak existuje dědičně Baireův prostor, který není $2^{\aleph_0}$-PCP-prostor.*

K důkazu budeme potřebovat některé vlastnosti hustotní topologie, jejíž definici nyní zavedeme.

Je-li $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor s úplnou mírou, řekneme, že $\Phi:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}$ je *dolní hustota* pro μ, platí-li:

(i) $\Phi(A) \vartriangle A \in\mathcal{N}$,
(ii) $A \vartriangle B \in\mathcal{N}\Rightarrow \Phi(A)=\Phi(B)$,
(iii) $\Phi(X)=X,\ \Phi(\emptyset)=\emptyset$,
(iv) $\Phi(A\cap B)=\Phi(A)\cap\Phi(B)$,

kde $\mathcal{N}$ je systém všech μ-nulových množin.

Věta [6, 22.4] říká, že pro každý prostor s úplnou mírou existuje dolní hustota.

Lemma 7.2. *(*[6, Věty 22.5-22.7]*) Buď $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor s úplnou mírou, Φ dolní hustota pro μ. Položme $\mathcal{T}=\{\Phi(A)\setminus N \mid A\in\mathcal{A}, N\in\mathcal{N}\}$. Pak*
(i) $\mathcal{T}$ je topologie,
(ii) N je řídká$\Leftrightarrow N\in\mathcal{N}$,
(iii) každá řídká množina je uzavřená,
(iv) každá množina první kategorie je řídká,
(v) každá neprázdná podmnožina X je druhé kategorie v sobě,
(vi) $(X,\mathcal{T})$ je dědičně Baireův,
(vii) $A\in\mathcal{A}\Leftrightarrow A=G\cup N$, kde $G\in\mathcal{T}$, $N\in\mathcal{N}$.

Důkaz. (i) Protože $\emptyset=\Phi(\emptyset)\setminus\emptyset,\ X=\Phi(X)\setminus\emptyset$, tedy $\emptyset, X\in\mathcal{T}$. Dále $(\Phi(A)\setminus N)\cap(\Phi(B)\setminus L)=\Phi(A\cap B)\setminus(N\cup L)$, tedy $\mathcal{T}$ je uzavřená na konečný průnik. Zbývá dokázat uzavřenost $\mathcal{T}$ na libovolné sjednocení. Buď $\mathcal{G}\subset\mathcal{T}$ libovolná. Položme $m=\sup\{\mu(\bigcup\mathcal{K}) \mid \mathcal{K}\subset\mathcal{G}$ konečná$\}$. Pak existují $G_n=\Phi(A_n)\setminus N_n\in\mathcal{G}$, kde $A_n\in\mathcal{A}$, $N_n\in\mathcal{N}$, tak, že $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n)=m$. Označme $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$. Buď $G\in\mathcal{G}$ libovolné, pak lze psát $G=\Phi(B)\setminus N$, kde $B\in\mathcal{A}$, $N\in\mathcal{N}$. Pak $G\setminus A\in\mathcal{N}$, tedy i $B\setminus A\in\mathcal{N}$. A protože $B\setminus(B\setminus A)\subset A$, platí $\Phi(B)\subset\Phi(A)$, tedy i $G\subset\Phi(A)$. Potom $A\subset\bigcup\mathcal{G}\subset\Phi(A)$. Tedy $\Phi(A)\setminus\bigcup\mathcal{G}\in\mathcal{N}$, tedy $\bigcup\mathcal{G}\in\mathcal{T}$.

(ii) Je zřejmé, že každý prvek $\mathcal{N}$ je uzavřená množina. Nechť $N\in\mathcal{N}$, nechť $\Phi(A)\setminus L\subset N$, $L\in\mathcal{N}$, $A\in\mathcal{A}$. Pak $\Phi(A)\in\mathcal{N}$, tedy $\Phi(A)=\emptyset$, tedy N má prázdný vnitřek, a proto je řídká. Obráceně, nechť N je řídká, pak $\operatorname{int}\bar{N}=\emptyset$. $\Phi(N)\setminus(\Phi(N)\setminus N)$ je otevřená podmnožina $\bar{N}$, tedy prázdná. A tedy $N\in\mathcal{N}$.

Tím je dokzno i (iii) a (iv).

(v) Je-li $A\subset X$ první kategorie v sobě, pak každá její podmnožina je první kategorie v X, tedy řídká, a proto uzavřená. Tedy A je diskrétní prostor první kategorie v sobě, tedy $A=\emptyset$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(vi) Je-li $A \subset X$ libovolná a $\emptyset \neq G \subset A$ otevřená v A a první kategorie v A, pak G je první kategorie v sobě, což je ve sporu s (v). Tedy dokonce každý podprostor X je Baireův.

(vii) Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak $A = (\Phi(A) \setminus (\Phi(A) \setminus A)) \cup (A \setminus \Phi(A))$. Obrácená implikace je zřejmá. □

Důkaz Příkladu 7.1. Nechť existuje nenulová míra μ definovaná na všech podmnožinách [0,1], která je nulová na jednobodových množinách. Buď $\mathcal{T}$ topologie definována jako v Lemmatu 7.2. Pak X=([0,1],$\mathcal{T}$) je dědičně Baireův a každá podmnožina X je H-množina. Systém všech jenobodových množin je tedy úplně H-aditivní systém řídkých množin, mohutnosti $2^{\aleph_0}$, tedy X nemá vlastnost $(H_{2^{\aleph_0}})$, tedy podle Tvrzení 2.1 není X $2^{\aleph_0}$-PCP-prostor.

Takto definovaný prostor X ovšem nemusí být Hausdorffův. Ale je-li $h : X \to [0,1]$ „identické" zobrazení, kde [0,1] uvažujeme s obvyklou topologií, pak podle Věty 1.3 je množina bodů nespojitosti funkce h první kategorie (protože X je dědičně Baireův a [0,1] separabilní). Speciálně existuje $A \subset X$ první kategorie (tedy uzavřená řídká), že $h \restriction X \setminus A$ je spojitá. Tedy $X_0 = X \setminus A$ je Hausdorffův. Navíc X_0 je dědičně Baireův (jakožto otevřená podmnožina dědičně Baireova prostoru) a nemá vlastnost $(H_{2^{\aleph_0}})$ (podle Lemmatu 3.6.(i)), a tedy ani X_0 není $2^{\aleph_0}$-PCP-prostor. □

Poznámky. (1) Prostor X_0 jistě splňuje $c(X_0) \leq \aleph_0$, dokazuje tedy, že ve Větě 2.12.(i) nelze vynechat podmínku na psedováhu. Avšak libovolná $F \subset X_0$ mohutnosti $\aleph_1$ je uzavřená diskrétní, a tedy $c(F) = \aleph_1$, tedy o nutnosti podmínek na kardinalitu ve Větě 2.12.(ii) neříká nic.

(2) Z toho, že $2^{\aleph_0}$ není měřitelný a z Tvrzení 4.10 plyne, že X_0 není t-Baireův, z Tvrzení 6.4.(iii) pak dostáváme, že X_0 není slabě α-favorabilní.

(3) Nechť M je $[0,1]$ s diskrétní metrikou, $f : X_0 \to M$ buď restrikce na X_0 „identického" zobrazení X na M. Pak f splňuje podmínky (c_1) a (d) z Věty 4.13, ale nikoli podmínku (a) této věty. Tedy implikace $(c_1)\&(d) \Rightarrow (a)$ nemusí platit pro dědičně Baireovy prostory.

Poznámka 7.3. Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s konečnou úplnou mírou a Φ nějaká dolní hustota pro μ, pak topologie $\mathcal{T}$ definovaná v Lemmatu 7.2 je dědičně Baireova a z téhož lemmatu plyne, že $(X, \mathcal{T})$ je κ-PCP-prostor, právě když míra μ má vlastnost:

(M_κ) Je-li $\mathcal{E}$ úplně $\mathcal{A}$ -aditivní systém

μ-nulových množin a $\operatorname{card} \mathcal{E} \leq \kappa$, pak $\mu(\bigcup \mathcal{E}) = 0$.

Tedy je-li μ Radonova míra na Hausdorffově prostoru, pak podle Lemmatu 4.9.(i) je X s topologií indukovanou libovolnou dolní hustotou PCP-prostor. V obecném případě vzniklá topologie nemusí být ani regulární ani Hausdorffova. Ale například pro $X = \mathbb{R}$ s Lebesgueovou mírou topologie indukovaná Lebesgueovou hustotou ([6,kap. 22]) je Hausdorffova a úplně regulární.

Je zřejmé, že pokud $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nesplňuje (M_κ), je κ reálně měřitelný ([8, Tvrzení 6D]). Tedy speciálně všechny takto vzniklé topologické prostory jsou κ-PCP-prostory pro $\kappa = \aleph_1, \aleph_2, \ldots,$ pro všechna κ menší než nejmenší reálně měřitelný kardinál. A za předpokladu neexistence takových kardinálů jsou všechny vzniklé prostory PCP- prostory.

Naopak, za předpokladu existence reálně měřitelného kardinálu $\leq 2^{\aleph_0}$ dává Příklad 7.1 prostor vzniklý popsaným způsobem, který není $2^{\aleph_0}$-PCP-prostor.

Příklad 7.4. *Nechť existuje měřitelný kardinál. Buď κ nejmenší takový. Pak existuje Hausdorffův prostor $X = (X, \mathcal{T})$, pro nějž platí:*

(i)([8, Příklad 12F]*) X je úplně regulární, α-favorabilní, $c(X) \leq \aleph_0$, ale X nemá vlastnost (H_κ).*

(ii) $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}))$ je Hausdorffův, dědičně Baireův, α-favorabilní, $c(X, \mathcal{T}(\mathcal{S})) \leq \aleph_0$, ale $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}))$ není κ-PCP-prostor.

(iii) Existuje Hausdorffův PCP-prostor Y, že $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}))$ je jeho podprostor.

Důkaz. (i) Buď $\mathcal{F}$ vlastní σ-ideál na κ, obsahující jednoprvkové množiny, takový, že pro každé $A \subset \kappa$ je buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $\kappa \setminus A \in \mathcal{F}$, položme $I = \kappa \cup \mathcal{F}$ a $Z = [0,1]^I$. Buď

$$X = \{x \in Z \mid (\exists! \xi < \kappa)(x(\xi) = 1) \\ \& \ (\forall A \in \mathcal{F})(x(A) = 1 \Leftrightarrow (\forall \xi \in \kappa \setminus A)(x(\xi) < 1))\}.$$

Nejprve dokážeme:

(*) Je-li $J \subset I$ spočetná a $u \in [0,1)^J$, pak existuje $x \in X$, $x \restriction J = u$.

Zřejmě $\bigcup (J \cap \mathcal{F}) \cup (J \cap \kappa) \in \mathcal{F}$, zvolme ξ_0 v doplňku této množiny v κ (což lze, neboť $\mathcal{F}$ je vlastní ideál), a položme

$$x(\xi) = \begin{cases} u(\xi) & \xi \in J \cap \kappa, \\ 1 & \xi = \xi_0, \\ 0 & \xi \in \kappa \setminus (J \cup \{\xi_0\}), \end{cases} \qquad x(A) = \begin{cases} u(A) & A \in J \cap \mathcal{F}, \\ 1 & A \in \mathcal{F} \setminus J, \xi_0 \in A, \\ 0 & A \in \mathcal{F} \setminus J, \xi_0 \notin A. \end{cases}$$

Pak $x \in X$ a $x \restriction J = u$, což dokazuje (*).

Z (*) pak plyne, že X je hustý v Z a navíc X je α-favorabilní. Pro důkaz hustoty stačí ukázat, že X protíná každý prvek nějaké otevřené báze Z. Zvolme bázi tvořenou množinami tvaru $G = \{x \in Z \mid x(j) \in G_j \text{ pro } j \in J\}$, kde $J \subset I$ je konečná a $\emptyset \neq G_j \subset [0,1]$ otevřená pro $j \in J$. Zvolme libovolně $u \in [0,1)^J$ tak, aby $u(j) \in G_j$ pro $j \in J$. Podle (*) existuje $x \in X$, pro něž $x \restriction J = u$. Pak $x \in G \cap X$. Dále ukážeme, že X je α-favorabilní. Je-li $G \subset X$ otevřená, pak existuje G' otevřená v Z, že $G = G' \cap X$. Dále existuje $J \subset I$ konečná, a interval $[a,b] \subset [0,1)$ tak, že $\{x \in Z \mid x(j) \in [a,b] \text{ pro } j \in J\} \subset G'$. Položme $\tau(G) = \{x \in X \mid x(j) \in (a,b) \text{ pro } j \in J\}$. Buďte $G_n, n \in \mathbb{N}$ neprázdné otevřené v X a $G_{n+1} \subset \tau(G_n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak existují $J_n \subset I$ konečné a intervaly $[a_n, b_n] \subset [0,1)$ tak, že pro každé n

$$G_{n+1} \subset \{x \in X \mid x(j) \in [a_n, b_n] \text{ pro } j \in J_n\} \subset G_n.$$

Položme $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Pak existuje $u \in [0,1)^J$, že $u(j) \in [a_n, b_n]$ kdykoli $j \in J_n$. Podle (*) existuje $x \in X$, pro které $x \restriction J = u$. Pak $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$, a tedy X je α-favorabilní. Navíc $c(X) \leq \aleph_0$, protože $c(Z) \leq \aleph_0$ a X je hustá v Z.

Položme $E_\xi = \{x \in X \mid x(\xi) = 1\}$ pro $\xi < \kappa$. Pak $(E_\xi)_{\xi < \kappa}$ je disjunktní rozklad X na řídké podmnožiny. Navíc tento rozklad je úplně H-aditivní, neboť

$$\bigcup_{\xi \in A} E_\xi = \begin{cases} \{x \in X \mid x(A) < 1\} & \text{je otevřená pro } A \notin \mathcal{F}, \\ \{x \in X \mid x(A) = 1\} & \text{je uzavřená pro } A \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Tedy X nemá vlastnost (H_κ).

(ii) Z Lemmatu 6.1.(d) plyne, že $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}))$ je dědičně Baireův, podle bodu (h) téhož lemmatu je $c(X, \mathcal{T}(\mathcal{S})) \leq \aleph_0$ a podle bodu (g) je $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}))$ α-favorabilní. Navíc systém $(E_\xi)_{\xi<\kappa}$ zkonstruovaný výše je i v $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}))$ úplně H-aditivní a tvořený řídkými množinami. Tedy $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}))$ nemá vlastnost (H_κ) a podle Tvrzení 2.1 není κ-PCP-prostor.

(iii) Prostor $Z = (Z, \mathcal{R})$ z bodu (i) je kompaktní Hausdorffův prostor, $c(Z) \leq \aleph_0$, podle Tvrzení 6.4.(iv) má tedy vlastnost (B). Proto podle Lemmatu 6.2.(ii) je $Y = (Z, \mathcal{R}(\mathcal{S}))$ PCP-prostor. Protože $(X, \mathcal{R}_X)$ je hustý v Z, je $\mathcal{S}(\mathcal{R}_X) = \mathcal{S}(\mathcal{R})_X$, a proto $\mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathcal{R}))_X = \mathcal{R}_X(\mathcal{S}(\mathcal{R}_X))$, jinými slovy $(X, \mathcal{R}_X(\mathcal{S}))$ je podprostorem Y. $\square$

Příklad 7.5. *(*[8, Příklad 12G]*) Nechť existuje měřitelný kardinál κ. Pak existují úplný metrický prostor X_1 a kompaktní Hausdorffův prostor X_2 takové, že žádný z nich nemá vlastnost (B_κ). Pak $(X_1, \mathcal{T}(\mathcal{S}))$ a $(X_2, \mathcal{T}(\mathcal{S}_\sigma))$ jsou dědičně Baireovy a nejsou κ-PCP-prostory.*

Důkaz. Buď $\mathcal{F}$ vlastní σ-ideál na κ obsahující jednoprvkové množiny, takový, že pro každé $A \subset \kappa$ je buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $\kappa \setminus A \in \mathcal{F}$. Buď $X_1 = \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, kde $\mathcal{F}$ uvažujeme s diskrétní metrikou. Pro $x \in X_1$ je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} x(n) \in \mathcal{F}$, tedy je vlastní podmnožinou κ, proto má smysl následující definice:

$$\phi(x) = \min(\kappa \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x(n)) \text{ pro } x \in X_1.$$

Položme $E_\xi = \{x \in X_1 \mid \phi(x) = \xi\}$ pro $\xi < \kappa$. Pak $(E_\xi)_{\xi<\kappa}$ je disjunktní rozklad X_1. Navíc, je-li $A \subset \kappa$, $\kappa \setminus A \in \mathcal{F}$, pak

$$\bigcup_{\xi\in A} E_\xi \supset \{x \in X_1 \mid (\exists n \in \mathbb{N})(x(n) = \kappa \setminus A)\},$$

což je hustá otevřená podmnožina X_1. Odsud plyne též, že $\bigcup_{\xi\in A} E_\xi$ je řídká v X_1 pro $A \in \mathcal{F}$. Tedy zkonstruovaný rozklad je úplně BP-aditivní a X_1 nemá vlastnost (B_κ). Buď X_2 Čech-Stoneova kompaktifikace X_1, pak zřejmě X_2 rovněž nemá vlastnost (B_κ). Zbytek tvrzení snadno plyne z Lemmatu 6.1 a 6.2. $\square$

Příklad 7.6. *Existuje topologický prostor X, který má těsnost $\aleph_1$, pseudováhu i charakter $\geq 2^{\aleph_0}$ a $c(F) \leq \aleph_0$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou. Takový prostor je PCP-prostor podle Věty 2.12, ale nesplňuje předpoklady Věty 2.3. Za negace hypotézy kontinua nesplňuje ani předpoklady Vět 2.5 a 2.7.*

Důkaz. Pro topologický prostor $(X, \mathcal{T})$ značme $\mathcal{C}(X)$ (případně $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ nebo jen $\mathcal{C}$) systém všech *lokálně spočetných* množin, t.j. takových $A \subset X$, že pro každé $x \in X$ existuje V okolí x, pro které $V \cap A$ je (nejvýš) spočetná. Pak zřejmě $\mathcal{C}$ je lokalizovatelný ideál, a tedy má smysl uvažovat topologii $\mathcal{T}(\mathcal{C})$. Z Lemmatu 6.1 pak okamžitě plyne:

(1) Jestliže žádná neprázdná otevřená podmnožina X není spočetná, potom $c(X, \mathcal{T}) = c(X, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$.

(2) Pokud X nemá izolované body, pak X a $(X, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ mají tytéž množiny s Baireovou vlastností a tytéž množiny první kategorie. Navíc $(X, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ je Baireův, právě když X je Baireův.

Z toho, že $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{C})$ plyne:

(3) Je-li X řídce rozložený, pak $(X, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ je řídce rozložený.

Dále, díky tomu, že lokálně spočetné množiny v $Y \subset X$ jsou právě průniky lokálně spočetných množin v X s Y, a tedy $(Y, \mathcal{T}_Y(\mathcal{C}))$ je podprostorem $(X, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$, můžeme tvrdit:

(4) Je-li X dědičně Baireův, je $(X, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ dědičně Baireův.

Ovšem, neboť je-li $\emptyset \neq F \subset X$ $\mathcal{T}(\mathcal{C})$-uzavřená, lze ji podle definice $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ psát $F = H \cup N$, kde H je $\mathcal{T}$-uzavřená a $N \in \mathcal{C}$. Pak N je diskrétní, a tedy Baireův prostor. Množinu H pak lze rozložit $H = D \cup R$, kde D je $\mathcal{T}$-dokonalá a R je $\mathcal{T}$-řídce rozložená. Podle (2) je $(D, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ Baireův prostor, podle (3) je $(R, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ řídce rozložený, a tedy Baireův. Podle Lemmatu 3.4.(ii) je pak $(F, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ Baireův.

Dále, protože v nové topologii jsou všechny lokálně spočetné (a speciálně všechny spočetné) množiny uzavřené, platí:

(5) Je-li X Baireův prostor bez izolovaných bodů, pak $(X, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ nemá spočetnou těsnost.

Zvolme totiž libovolně $x \in X$. Pak $\{x\}$ je množina $\mathcal{T}(\mathcal{C})$-první kategorie, a tedy x není izolovaný ani v nové topologii. Jinými slovy $x \in \overline{X \setminus \{x\}}^{\mathcal{T}(\mathcal{C})}$, ale x není v uzávěru žádné spočetné podmnožiny $X \setminus \{x\}$.

(6) Buď $\tau = \chi(X)$. Pak těsnost prostoru $(X, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ je nejvýš $\max(\tau, \aleph_1)$.

Buď $A \subset X$ a $x \in \bar{A}^{\mathcal{T}(\mathcal{C})}$. Buď $(V_\xi)_{\xi<\tau}$ báze $\mathcal{T}$-okolí bodu x. Pak pro každé $\xi < \kappa$ existuje $B_\xi \subset A \cap V_\xi$ taková, že $\operatorname{card} B_\xi = \aleph_1$ (protože x leží v uzávěru A a spočetné množiny jsou uzavřené.) Položme $B = \bigcup_{\xi<\tau} B_\xi$. Pak $B \subset A$, $\operatorname{card} B = \max(\tau, \aleph_1)$ a navíc $x \in \bar{B}^{\mathcal{T}(\mathcal{C})}$. Stačí dokázat, že $U \cap B \neq \emptyset$ pro prvky nějaké báze $\mathcal{T}(\mathcal{C})$-okolí bodu x. Z definice $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ plyne, že její bázi tvoří množiny tvaru $G \setminus C$, kde $G \in \mathcal{T}$ a C je spočetná. Buď $G \setminus C$ taková množina, pro niž navíc $x \in G \setminus C$. Pak existuje $\xi < \tau$, že $V_\xi \subset G$. Pak $(G \setminus C) \cap B \supset B_\xi \setminus C \neq \emptyset$, čímž je důkaz proveden.

(7) Pokud v X existuje disjunktní systém hustých lokálně spočetných množin, jehož mohutnost je $\kappa > \aleph_0$, pak $\pi w(X, \mathcal{T}(\mathcal{C})) \geq \kappa$ a $\chi(X, \mathcal{T}(\mathcal{C})) \geq \kappa$.

Buď $(E_\xi)_{\xi<\kappa}$ onen disjunktní systém. Buď $\mathcal{B}$ pseudobáze $\mathcal{T}(\mathcal{C})$. Pak pro každé $\xi < \kappa$ existuje $B_\xi \in \mathcal{B}$ tak, že $B_\xi \subset X \setminus E_\xi$. Pro $B \in \mathcal{B}$ buď $A_B = \{\xi < \kappa \mid B \subset X \setminus E_\xi\}$. Pak pro každé B je A_B nejvýš spočetná. Je-li totiž $B = G \setminus C$, kde $G \in \mathcal{T}$ a C je spočetná (můžeme předpokládat, že $\mathcal{B}$ je tvořena takovými množinami), a $G \setminus C \subset X \setminus E_\xi$, protože E_ξ je hustá, je $G \cap E_\xi \neq \emptyset$, a tedy $C \cap E_\xi \neq \emptyset$. Protože C je spočetná a E_ξ po dvou disjunktní, může takových ξ být jen spočetně. Proto A_B je spočetná, a tedy $\operatorname{card} \mathcal{B} \geq \kappa$. Tvrzení o charakteru se dokáže podobně (je-li $x \in X$ a $\mathcal{U}$ báze okolí tvořená množinami tvaru $G \setminus C$, kde $G \in \mathcal{T}$ a C je spočetná, pak ke každému $\xi < \kappa$ s jedinou výjimkou (toho, pro které $x \in E_\xi$) existuje $U_\xi \in \mathcal{U}$, že $U \subset X \setminus E_\xi$, potom stejně dokážeme, že $\operatorname{card} \mathcal{U} \geq \kappa$).

Důsledkem předchozích tvrzení je:

(8) Je-li X dědičně Baireův prostor, jehož všechny řídce rozložené podprostory jsou spočetné, který sám není řídce rozložený, jehož charakter je menší než nejmenší slabě nedosažitelný kardinál, a který splňuje $c(F) \leq \aleph_0$ pro každou $\emptyset \neq F \subset X$ uzavřenou, pak $(X, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ splňuje předpoklady Věty 2.12.(a), ale ne předpoklady Věty 2.3.

Je-li X reálná osa (nebo $\mathbb{R}^n$) nebo Sorgenfreyova přímka, pak $(X, \mathcal{T}(\mathcal{C}))$ má všechny vlastnosti požadované ve znění příkladu. (Podle (4) je dědičně Baireův, podle (1) je splněna podmínka na Suslinovo číslo, podle (5) a (6) má těsnost $\aleph_1$, podle (7) je charakter i pseudováha $\geq 2^{\aleph_0}$.) Další příklady prostorů, pro které lze použít Větu 2.12, ale ne Větu 2.3 (ev. 2.5 a 2.7) lze konstruovat pomocí (7) a (8). $\square$

Příklad 7.7. *Existují dva PCP-prostory, jejichž součin je první kategorie v sobě.*

Důkaz. Mějme dva topologické prostory $(X, \mathcal{T})$ a $(Y, \mathcal{R})$ a označme $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(\mathcal{S})$ a $\mathcal{R}' = \mathcal{R}(\mathcal{S})$. Z Lemmatu 6.1 plyne:

(1) Je-li $(X, \mathcal{T})$ (resp. $(Y, \mathcal{R})$) Baireův, je $(X, \mathcal{T}')$ (resp. $(Y, \mathcal{R}')$) dědičně Baireův.
(2) $\pi w(X, \mathcal{T}) = \pi w(X, \mathcal{T}')$, $\pi w(Y, \mathcal{R}) = \pi w(Y, \mathcal{R}')$.

Dále označme $\mathcal{P} = \mathcal{T} \times \mathcal{R}$, $\mathcal{P}' = \mathcal{T}' \times \mathcal{R}'$ příslušné součinové topologie na $X \times Y$. Pak zřejmě $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ a navíc platí:

(3) Je-li $G \in \mathcal{P}'$, pak $G \subset \overline{\operatorname{int}_{\mathcal{P}} G}^{\mathcal{P}}$.

Buď totiž $G \in \mathcal{P}'$ a $x \in G$. Buďte $U \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{R}$ takové, že $x \in U \times V$. Pak $x \in G \cap (U \times V) \in \mathcal{P}'$, tedy existují $U' \in \mathcal{T}'$, $V' \in \mathcal{R}'$ tak, že $x \in U' \times V' \subset G \cap (U \times V)$. Podle Lemmatu 6.1.(f) existují $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$ a $\emptyset \neq B \in \mathcal{R}$, že $A \subset U'$, $B \subset V'$, speciálně $A \times B \subset \operatorname{int}_{\mathcal{P}} G \cap (U \times V)$, což dokazuje (3).
Odtud pak dostaneme

(4) Je-li $(X \times Y, \mathcal{P})$ první kategorie v sobě, je i $(X \times Y, \mathcal{P}')$ první kategorie v sobě.

Je-li $X \times Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, kde F_n jsou $\mathcal{P}$-uzavřené a $\mathcal{P}$-řídké, pak jsou i $\mathcal{P}'$-uzavřené. Kdyby $\operatorname{int}_{\mathcal{P}'} F_n \neq \emptyset$, pak podle (3) je i $\operatorname{int}_{\mathcal{P}} F_n \neq \emptyset$, což je spor s předpokladem, že F_n je $\mathcal{P}$-řídká. Tedy nutně F_n je $\mathcal{P}'$-řídká pro všechna n, tedy $(X \times Y, \mathcal{P}')$ je první kategorie v sobě.
Příklad 1.2 v [11] ukazuje dva metrizovatelné prostory $X = (X, \mathcal{T})$ a $Y = (Y, \mathcal{R})$, z nichž oba jsou Baireovy, mají váhu (t.j. mohutnost báze) $\aleph_1$, ale $X \times Y$ je první kategorie v sobě. Nicméně se lze snadno přesvědịt, že ani jeden z prostorů X, Y není dědičně Baireův. Ale $(X, \mathcal{T}')$ i $(X, \mathcal{R}')$ (kde používáme výše definované značení) jsou podle (1) dědičně Baireovy. Podle (2) oba mají pseudováhu $\aleph_1$, tedy podle Věty 2.5 mají vlastnost (S). S využitím Lemmatu 6.1.(c) a Tvrzení 3.7.(ii) se

snadno přesvědčíme, že to jsou dokonce PCP-prostory. Ale jejich součin je podle (4) první kategorie v sobě. □

Příklad 7.8. Existuje metrický PCP-prostor, který není t-Baireův. Podle [6, Věta 5.3] existuje $B \subset \mathbb{R}$ taková, že B i B^C protínají každou nespočetnou uzavřenou podmnožinu $\mathbb{R}$ v nespočetné množině. Taková množina se nazývá *Bernsteinova množina.*

(1) Bernsteinova množina je PCP-prostor.

Připomeňme, že podmnožina M topologického prostoru X je *hustě rozložená*, pokud nemá izolovaný bod, M je *dokonalá*, je-li hustě rozložená a uzavřená, M se nazývá *řídce rozložená*, pokud neobsahuje neprázdnou hustě rozloženou podmnožinu. Připomeňme, že každý topologický prostor lze napsat jako sjednocení dvou disjunktních množin, z nichž jedna je dokonalá a druhá řídce rozložená, a že každá neprázdná dokonalá podmnožina $\mathbb{R}$ má mohutnost kontinua.

Důkaz. Nechť B je Bernsteinova množina. Protože B je metrizovatelný prostor, stačí podle Věty 2.3 ukázat, že je dědičně Baireův. Buď $\emptyset \neq F \subset B$ uzavřená. Pak F lze psát $F = P \cup N$, kde P je dokonalá v F (tedy i v B) a N řídce rozložená. Stačí dokázat, že $G = (a,b) \cap F$ je druhé kategorie v F, kdykoli je neprázdná. Pokud $G \cap N \neq \emptyset$, pak G má izolovaný bod, a tedy je druhé kategorie. Dále předpokládejme $\emptyset \neq G \subset P$. Pak $\bar{G}^{\mathbb{R}}$ je dokonalá v $\mathbb{R}$, tedy nespočetná. Buďte $U_n, n \in \mathbb{N}$ otevřené husté v G, V_n otevřené v $\bar{G}$ tak, že $U_n = G \cap V_n$. Pak $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ je hustá G_δ podmnožina $\bar{G}$. Kdyby V byla spočetná, byla by první kategorie v $\bar{G}$, ale $\bar{G}$ je Baireův prostor. Tedy V je nespočetná, tedy obsahuje neprázdnou dokonalou množinu [6, Lemma 5.1], tedy $V \cap B$ je nespočetná. A $V \cap B \subset \bar{G} \cap B \subset [a,b] \cap P$, tedy $V \cap G \neq \emptyset$, tedy G je druhé kategorie v F. □

(2) Je-li B Bernsteinova množina, pak $P_t(B)$ je první kategorie v sobě.

Důkaz. Nejdřív si uvědomme, že Radonovy míry na B jsou právě míry nesené spočetnou množinou, což plyne z toho, že všechny kompaktní podmnožiny B jsou spočetné. Snadno si uvědomíme, že slabá topologie na $P_t(B)$ je nejmenší topologie taková, že $\mu \mapsto \mu(G)$ je zdola polospojitá pro každý prvek G nějaké otevřené báze. Označme $\mathcal{B} = \{(a,b) \cap B \mid -\infty \leq a < b \leq +\infty, a \notin B, b \notin B\}$. Pak $\mathcal{B}$ je báze topologie B tvořená obojetnými množinami. Tedy slabá topologie je nejmenší taková, že $\mu \mapsto \mu(G)$ je spojitá pro každé $G \in \mathcal{B}$. A protože existuje spočetná podmnožina $\mathcal{B}$, která je sama bazí, je $P_t(B)$ metrizovatelný.

Pro $\mu \in P_t(B), x \in B$ pišme $\mu(x) = \mu(\{x\})$. Pro $m > 0, p \geq m, l > 0$ položme

$$M_{m,p,l} = \{\mu \in P_t(B) \mid (\exists x_1, ..., x_m \in B)(x_{i+1} - x_i \geq \frac{1}{l}, i = 1, ..., m-1;$$
$$\mu(\{x_1, \dots, x_m\}) \geq \frac{2}{3}; \mu(x_i) \geq \frac{1}{p}, i = 1, ..., m)\}$$

Pak tyto množiny jsou uzavřené řídké a pokrývají $P_t(B)$. Pro $\mu \in P_t(B)$ existuje $M = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tak, že $\mu(B \setminus M) = 0$, tedy $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(x_n) = 1$. Tedy existuje m_0 tak, že $\sum_{n \leq m_0} \mu(x_n) \geq \frac{2}{3}$. Nechť $\{y_1 < ... < y_m\} = \{x_i \mid i \leq m_0, \mu(x_i) > 0\}$. Pak pro dostatečně velké p, l je $\mu \in M_{m,p,l}$. Dokažme uzavřenost $M_{m,p,l}$. Nechť $\mu_n \in M_{m,p,l}, \mu_n \to \mu \in P_t(B)$. Pro každé n najdeme $x_1^n, ..., x_m^n$ podle definice $M_{m,p,l}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pro každé $i = 1, ..., m$ platí $x_i^n \to x_i \in [-\infty, +\infty]$. Kdyby pro nějaké i bylo $x_i \notin B$, pak existují $U_k \in \mathcal{B}$ pro

$k \in \mathbb{N}$, že $U_{k+1} \subset U_k, \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k = \emptyset, x_i \in \operatorname{int} \bar{U}_k$, kde vnitřek i uzávěr jsou vzhledem k $[-\infty, +\infty]$. Pro každé k existuje n_0, že pro $n > n_0$ je $x_i^n \in U_k$, tedy $\mu_n(U_k) \geq \frac{1}{p}$ pro $n > n_0$, tedy $\mu(U_k) \geq \frac{1}{p}$, tedy $0 = \mu(\emptyset) = \lim_{k\to\infty} \mu(U_k) \geq \frac{1}{p}$, což je spor, tedy nutně $x_i \in B$.

Pak zřejmě $x_{i+1} - x_i \geq \frac{1}{l}, i = 1, ..., m-1$. Zvolme $U_k^i \in \mathcal{B}$ tak, že $\{x_i\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k^i$, položme $V_k = \bigcup_{i=1}^m U_k^i$. Pak $\mu(U_k^i) \geq \frac{1}{p}$, tedy $\mu(x_i) \geq \frac{1}{p}$, podobně $\mu(V_k) \geq \frac{2}{3}$, tedy $\mu(\{x_1, ..., x_m\}) \geq \frac{2}{3}$, tedy $\mu \in M_{m,p,l}$.

Dále dokažme, že $M_{m,p,l}$ je řídká. Nechť $\mu \in M_{m,p,l}, U_1, ..., U_k \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$. Ke každému i najdeme $y_1^i, ..., y_6^i \in B$ různá tak, že $y_1^i = x_i, |y_j^i - x_i| < \frac{1}{4l}$, a $y_j^i \in U_q$, právě když $x_i \in U_q$, a navíc $\mu(y_j^i) = 0$ pro $j = 2, ..., 6$. Definujme $\nu \in P_t(B)$ předpisem $\nu(y_j^i) = \frac{\mu(x_i)}{6}$, $\nu(x) = \mu(x)$ jindy. Pak $|\mu(U_q) - \nu(U_q)| = 0 < \varepsilon$, ale $\nu \notin M_{m,p,l}$. Ovšem, jsou-li $z_1, ..., z_m \in B$ tak, že $z_{i+1} - z_i \geq \frac{1}{l}$, pak pro každé i je $y_j^i \in \{z_1, ..., z_m\}$ nejvýš pro jedno j, tedy $\nu(\{z_1, ..., z_m\}) < \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Tím je důkaz proveden. $\square$

8. PROBLÉMY

Problém 8.1. *Je konsistentní předpokládat, že existuje dědičně Baireův prostor, který není $\aleph_1$-PCP-prostor?*

Podle Věty 6.3 je existence takového prostoru ekvivalentní existenci Baireova prostoru, který nemá vlastnost $(H_{\aleph_1})$ resp. $(B_{\aleph_1})$. Přitom Baireův prostor X, který nemá vlastnost $(H_{\aleph_1})$ nemůže být t-Baireův (Tvrzení 4.10) a musí splňovat $\pi w(X) > \aleph_1$ (Věta 2.5.(i)). Podle Poznámky (1) za Větou 6.3 pro Baireův prostor, který nemá vlastnost $(B_{\aleph_1})$, musí platit $c(X) > \aleph_0$ a za negace hypotézy kontinua nemůže X být slabě α-favorabilní. Prostor X_0 z Příkladu 7.1 je κ-PCP-prostor pro κ menší než nejmenší reálně měřitelný kardinál (Poznámka 7.3), speciálně je $\aleph_1$-PCP-prostor. Prostor $(X, \mathcal{T})$ z Příkladu 7.4 má vlastnost (B_κ) pro κ menší než nejmenší měřitelný kardinál (Tvrzení 6.4.(iii)), a tedy $(X, \mathcal{T}(\mathcal{S}))$ je $\aleph_1$-PCP-prostor (Lemma 6.2.(iii)). Prostory zkonstruované v Příkladu 7.5 jsou (dědičně) slabě α-favorabilní, a tedy za negace hypotézy kontinua jsou to $\aleph_1$-PCP-prostory (Věta 5.3), ale za hypotézy kontinua to není zřejmé.

Jinou související otázkou je, zda existuje dědičně Baireův prostor s těsností $\aleph_1$, který není PCP-prostor (podle Tvrzení 2.2 by takový prostor nebyl $\aleph_1$-PCP-prostor.)

Problém 8.2. *Je konsistentní předpokládat, že existuje (úplně) regulární dědičně Baireův prostor, který není PCP-prostor?*

Příklad 7.4 ukazuje Baireův úplně regulární prostor, který nemá vlastnost (H) (za předpokladu existence měřitelného kardinálu). Tento prostor však není dědičně Baireův, protože každá E_ξ je uzavřená a homeomorfní $[0,1)^{2^\kappa}$, kde κ je nejmenší měřitelný kardinál, tedy jistě obsahuje jako uzavřenou podmnožinu kopii $\mathbb{N}^{\omega_1}$, což není dědičně Baireův prostor. Položme totiž

$$F = \{\alpha = (\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1} \in \mathbb{N}^{\omega_1} \mid (\forall \xi < \eta < \omega_1)(\alpha_\xi \le \alpha_\eta)\}.$$

Pak F je zřejmě uzavřená neprázdná a navíc pro každé $\alpha \in F$ je $\sup\limits_{\xi<\omega_1} \alpha_\xi < +\infty$ (kdyby pro každé n existovalo $\xi_n < \omega_1$ tak, že $\alpha_{\xi_n} > n$, pak položíme-li $\xi = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \xi_n$, pak podle definice F je $\alpha_\xi > n$ pro každé n, což je nemožné.) Tedy, položíme-li $F_n = \{\alpha \in F \mid \sup\limits_{\xi<\omega_1} \alpha_\xi \le n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak F_n jsou uzavřené řídké podmnožiny F. (Uzavřenost je zřejmá, pro důkaz řídkosti zvolme libovolně $\alpha \in F$ a $\xi_1, ..., \xi_k < \omega_1$. Položme $\xi = \max\limits_{1\le j\le k} \xi_k$ a

$$\beta_\eta = \begin{cases} \alpha_\eta & \eta \le \xi, \\ \max(\alpha_\xi, n+1) & \eta > \xi. \end{cases}$$

Pak $\beta \in F \setminus F_n$, tedy v každém okolí libovolného prvku F jsme našli prvek $F \setminus F_n$, tedy F_n je řídká v F.) Navíc $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, tedy F je první kategorie v sobě.

A žádný z dědičně Baireových prostorů, které nejsou PCP-prostory, zkonstruovaných v Příkladech 7.4 a 7.5 není regulární (Poznámka 6.9). A o regularitě prostoru X_0 z Příkladu 7.1 nelze říci nic, alespoň pokud Φ je obecná dolní hustota.

Problém 8.3. *Je konsistentní předpokládat, že existuje dědičně t-Baireův (kompaktní Hausdorffův) prostor, který není PCP-prostor?*

Jinými slovy, je konsistentní předpokládat, že existuje dědičně t-Baireův prostor, který nemá vlastnost (H) (Tvrzení 2.1)? Tvrzení 4.10 říká, že existuje-li takový prostor, již existuje měřitelný kardinál. Podle Věty 4.12 pak musí takový prostor mít těsnost alespoň rovnou nejmenšímu měřitelnému kardinálu, pseudováhu a charakter (a silnou těsnost) pak větší než nejmenší měřitelný kardinál. Omezíme-li otázku na kompaktní Hausdorffovy prostory, stačí se ptát, zda $[0,1]^\kappa$ je PCP-prostor pro všechna κ. Z Věty 4.12 plyne, že je to pravda pro κ nejvýš rovno nejmenšímu měřitelnému kardinálu, například pro jeho následníka to zůstává otázkou.

Tvrzení 6.4.(iv) říká, že pokud kompaktní Hausdorffův prostor X nemá vlastnost (B), pak $c(X) > \aleph_0$ (tedy $[0,1]^\kappa$ má vždy vlastnost (B) a tím spíše vlastnost (H)), prostor X_2 z Příkladu 7.5 pak takovým prostorem je. Nicméně X_2 má vlastnost (H) (je totiž kompaktifikací úplného metrického prostoru, který má vlastnost (H) podle Věty 2.3, a tedy podle Lemmatu 3.6.(i) i X_2 má vlastnost (H).)

Obměnou důkazu Tvrzení 4.10 lze dokázat, že t-Baireův prostor X má vlastnost (H_κ), právě když pro každý úplně H_σ-aditivní systém $\mathcal{E}$ množin první kategorie v X, jehož mohutnost je nejvýš κ, je množina $P = \bigcup\{E \times E \mid E \in \mathcal{E}\}$ první kategorie v $X \times X$. (Má-li X vlastnost (H_κ), pak $\bigcup \mathcal{E}$ je první kategorie v X, a tedy $P \subset (\bigcup \mathcal{E}) \times (\bigcup \mathcal{E})$ je první kategorie. Obráceně, je-li P první kategorie, pak

$$\{\mu \in M_t(X) \mid (\mu \times \mu)^*(P) = 0\} \subset \{\mu \in M_t(X) \mid \mu(\bigcup \mathcal{E}) = 0\},$$

a tedy podle Lemmatu 4.2 je $\bigcup \mathcal{E}$ první kategorie v X.) Tedy speciálně, kdybychom věděli, že pro každý Hausdorffův kompaktní prostor X a každý úplně H_σ-aditivní systém $\mathcal{E}$ množin první kategorie v X je $\bigcup\{E \times E \mid E \in \mathcal{E}\}$ první kategorie v $X \times X$, věděli bychom, že všechny kompaktní Hausdorffovy prostory jsou PCP-prostory.

Problém 8.4. *Pro která κ je pravda, že G_δ-podmnožina κ-PCP-prostoru je κ-PCP-prostor?*

Pro $\kappa = \aleph_0$ to pravda je, protože $\aleph_0$-PCP-prostory jsou právě dědičně Baireovy prostory. Přitom, pokud pro nějaké κ je to pravda, pak již všechny dědičně Baireovy BPR-podmnožiny κ-PCP-prostoru jsou κ-PCP-prostory, což se dokáže s využitím Lemmatu 3.6.(i).

Problém 8.5. *Je pravda, že je-li X $2^{\aleph_0}$-PCP-prostor, je již κ-PCP-prostor pro κ menší než nejmenší měřitelný kardinál? Je to pravda alespoň pro dědičně slabě α-favorabilní prostory?*

Z důkazu Věty 3 v [10,§2] plyne, že pokud prostor s konečnou mírou má vlastnost $(M_{2^{\aleph_0}})$ z Poznámky 7.3, pak má vlastnost (M_κ) pro κ menší než nejmenší měřitelný kardinál. Vzhledem k určité analogii mezi (reálně) měřitelnými kardinály a prostory bez vlastnosti (H) se nabízí otázka, zda pro ně platí analogie této věty. Avšak při důkaze citované věty se zřetelně využívá, že se jedná o konečnou míru.

Problém 8.6. *Je pravda, že za předpokladu neexistence reálně měřitelných kardinálů jsou všechny dědičně Baireovy prostory PCP-prostory?*

Existence dědičně Baireova prostoru, který není PCP-prostor, je ekvikonsistentní existenci (reálně) měřitelného kardinálu (poznámka za Větou 6.3), je otázkou, zda je i ekvivalentní (jedna implikace plyne z Příkladů 7.1, 7.4 a 7.5, ptáme se na obrácenou).

Problém 8.7. *Pro která κ je pravda, že pokud X, Y mají vlastnost (S_κ) (resp. (H_κ)) a pokud $\pi w(Y) \leq \aleph_0$, pak $X \times Y$ má vlastnost (S_κ) (resp. (H_κ)?*

Pro $\kappa = \aleph_0$ to pravda je, což plyne z Kuratowského-Ulamovy věty. Přitom se zdá, že její důkaz v [6] nelze adaptovat pro větší κ.

Dalšími problémy jsou otázky, zda v některých větách jsou omezení kardinality (těsnosti, charakteru, ...) nutná. Konkrétně jde o Věty 2.12.(ii) (srov. Poznámku (1) za důkazem Příkladu 7.1), 4.12 (srov. Problém 8.3), 5.6.(ii) a 6.6.(ii) (prostory zkonstruované v Příkladech 7.4 a 7.5 mají uzavřený podprostor, jehož Suslinovo číslo je měřitelný kardinál).

Literatura

[1] P.Holický, *Remark on the point of continuity property and the strong Baire property in the restricted sense*, Bull. Acad. Polon. Sci. **24** (1976), 599–603.

[2] P.Holický and O.Kalenda, *Remark on the point of continuity property II*, zasláno k publikaci.

[3] G.Koumoullis, *A generalization of functions of the first class*, Topology and its Applications **50** (1993), 217–239.

[4] G.Koumoullis, *Baire category in spaces of measures*, Advances in Math., zasláno k publikaci.

[5] K.Kuratowski, *Topology Vol I*, Academic Press, New York, 1978.

[6] J.C.Oxtoby, *Measure and Category*, 2nd edition, Springer-Verlag New York Inc., 1980.

[7] V.S.Varadarajan, *Measures on topological spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. **48** (1965), 161–228.

[8] D.H.Fremlin, *Measure-additive coverings and measurable selectors*, Dissertationes Math. **260** (1987), 1–116.

[9] R.Frankiewicz and K.Kunen, *Solution of Kuratowski's problem on function having the Baire property I*, Fund. Math. **128** (1987), 171–180.

[10] S.Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. **16** (1930), 140–150.

[11] M.Wójcicka, *Note on Baire Category in Spaces of Probability Measures on Nonseparable Metric Spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. **33** (1985), no. 5-6, 305–311.

Rejstřík

Uvádíme zde některé pojmy a značení v práci používané. Tučně psané jsou odkazy na definice - na tvrzení, v němž nebo před nímž je příslušný pojem definován, eventuelně na Úvod, je-li definován v úvodní kapitole. Kurzívou jsou psané odkazy na tvrzení o příslušných pojmech, přičemž *A, B, C* jsou odkazy na věty z úvodní kapitoly. Některé další značení je pak popsáno v závěru úvodní kapitoly.

$\pi w(X)$ = pseudováha
$\chi(X)$ = charakter