Příklad 1. Použijeme standardní substituci „$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$“ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Budeme tedy počítat primitivní funkci

$$\int \frac{\left(\frac{2y}{1+y^2}\right)^2}{\frac{2y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2} + 2} \cdot \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Toto upravíme na

$$\int \frac{8y^2}{(2y+1-y^2+2(y^2+1))(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{8y^2}{(y^2+2y+3)(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Tím jsme dostali racionální funkci, a tedy postupujeme dle standardního algoritmu:
Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (6), a tak rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{8y^2}{(y^2+2y+3)(y^2+1)^2} = \frac{Ay+B}{y^2+2y+3} + \frac{Cy+D}{y^2+1} + \frac{Ey+F}{(y^2+1)^2}.$$

Po vyřešení příslušné soustavy vyjde $A = 2$, $B = 3$, $C = -2$, $D = 1$, $E = 2$, $F = -2$. Integrujeme jednotlivé parciální zlomky. Nejprve první. Jest

$$\frac{2y+3}{y^2+2y+3} = \frac{2y+2}{y^2+2y+3} + \frac{1}{y^2+2y+3},$$

přičemž

$$\int \frac{2y+2}{y^2+2y+3}\,\mathrm{d}y = \log(y^2+2y+3) + C \text{ na } \mathbf{R};$$

a

$$\int \frac{1}{y^2+2y+3}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{(y+1)^2+2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{2((\frac{y+1}{\sqrt{2}})^2+1)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{((\frac{y+1}{\sqrt{2}})^2+1)}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{y+1}{\sqrt{2}} + C \text{ na } \mathbf{R}.$$

Je tedy

$$\int \frac{2y+3}{y^2+2y+3}\,\mathrm{d}y = \log(y^2+2y+3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{y+1}{\sqrt{2}} + C \text{ na } \mathbf{R}.$$

Pro druhý parciální zlomek dostáváme:

$$\int \frac{-2y+1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int \left(-\frac{2y}{y^2+1} + \frac{1}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = -\log(y^2+1) + \operatorname{arctg} y + C \text{ na } \mathbf{R}.$$

Pro třetí parciální zlomek dostáváme:

$$\int \frac{2y-2}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2y}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y - 2\int \frac{1}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y^2+1} - \frac{y}{y^2+1} - \operatorname{arctg} y \text{ na } \mathbf{R}.$$

Celkem tedy

$$\int \frac{8y^2}{(y^2+2y+3)(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y = \log(y^2+2y+3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{y+1}{\sqrt{2}} - \log(y^2+1) - \frac{1+y}{y^2+1} + C \text{ na } \mathbf{R}.$$

Dosadíme-li do pravé strany $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, dostaneme primitivní funkci k $\frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x + 2}$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, a tedy i na každém z intervalů $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$. Chceme-li získat primitivní funkci na $\mathbf{R}$, musíme „nalepit vhodná posunutí“ spočtené funkce na jednotlivých intervalech. K tomu potřebujeme spočítat limitu v $\pi-$ a $\pi+$ funkce $\log(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}-\log(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1)-\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi-}&\log\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}-\log\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)-\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}\\&=\lim_{x\to\pi-}\log\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}-\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Limita zprava v bodě π vyjde analogicky $\frac{-\pi}{2\sqrt{2}}$. Dostáváme tedy:

$$\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x+2}\,\mathrm{d}x=F(x)+C\text{ na }\mathbf{R},$$

kde

$$F(x)=\begin{cases}\log\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}-\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}+k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi),\\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}+k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & x=(2k+1)\pi.\end{cases}$$

Příklad 2. Nejprve vyšetříme bodovou konvergenci. Pro každé $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ platí

$$\lim_{n\to\infty}n\operatorname{arctg}\frac{x}{n}=\lim_{n\to\infty}x\cdot\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}=x.$$

(Používáme fakt, že $\lim_{y\to0}\frac{\operatorname{arctg}y}{y}=\operatorname{arctg}'0=1$, Heineho větu a větu o aritmetice limit.) Pro $x=0$ je

$$\lim_{n\to\infty}n\operatorname{arctg}\frac{x}{n}=\lim_{n\to\infty}0=0=x,$$

je tedy

$$f_n\to x\text{ na }\mathbf{R}.$$

Dále zkoumejme, na kterých intervalech je tato konvergence stejnoměrná.
Protože pro každé $n\in\mathbf{N}$ platí

$$\lim_{x\to+\infty}f_n(x)-x=-\infty\qquad\text{a}\qquad\lim_{x\to-\infty}f_n(x)-x=+\infty,$$

není konvergence stejnoměrná na žádném neomezeném intervalu (tj. na intervalu $(-\infty,c)$ ani na $(c,+\infty)$ pro $c\in\mathbf{R}$). Abychom prozkoumali povahu konvergence na omezených intervalech, vyšetřeme průběh funkce $f_n(x)-x$, konkrétně její monotonii. Její derivace je pro každé $x\in\mathbf{R}$ rovna

$$(f_n(x)-x)'=f_n'(x)-1=n\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}-1=\frac{n^2}{n^2+x^2}-1=\frac{-x^2}{n^2+x^2},$$

funkce $f_n(x)-x$ je tedy klesající na $\mathbf{R}$. Protože je zároveň lichá, je zřejmě pro každé $c>0$

$$\sup\{|f_n(x)-x|\colon x\in\langle-c,c\rangle\}=|f_n(c)-c|.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(c)-c|=0$ pro každé c, je konvergence stejnoměrná na intervalu $\langle-c,c\rangle$ pro každé $c>0$, tedu i na všech omezených intervalech.
Závěr: Posloupnost f_n konverguje bodově k x na $\mathbf{R}$. Konvergence je stejnoměrná na omezených intervalech, není stejnoměrná na neomezených intervalech.

Příklad 3. Označme $u_n(x) = \frac{n \sin nx}{17^n}$. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}$ platí $|u_n(x)| \leq \frac{n}{17^n}$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{17^n}$ konverguje (podle odmocninového nebo podílového kritéria), a tedy podle Weierstrassova kritéria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$. Protože každá z funkcí u_n je spojitá na $\mathbf{R}$, podle věty o spojitosti limitní funkce je na $\mathbf{R}$ spojitá i funkce $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Dostáváme tedy:

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} u_n = (N) \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (N) \int_0^\pi u_n.$$

První rovnost plyne z věty o výpočtu Riemannova integrálu pomocí primitivní funkce, druhá z věty o záměně limity a integrálu. Jest

$$(N) \int_0^\pi u_n = \left[\frac{-\cos nx}{17^n} \right]_0^\pi = \frac{1-(-1)^n}{17^n},$$

a tedy

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{17^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{17^{2n-1}} = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{17^2}} = \frac{34}{17^2-1} \left(= \frac{17}{144} \right).$$

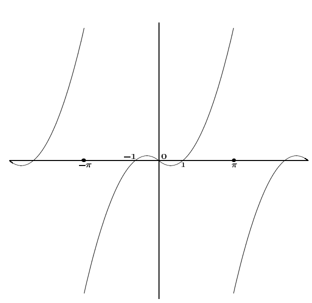
Příklad 4. Spočtěme koeficienty:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x^2 - x) \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left(\left[(x^2 - x) \frac{-\cos nx}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi (2x-1) \frac{-\cos nx}{n} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left((\pi^2 - \pi) \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n} \int_0^\pi (2x-1) \cos nx \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2(\pi-1)(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n\pi} \left(\left[(2x-1) \frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \frac{\sin nx}{n} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2(\pi-1)(-1)^{n+1}}{n} - \frac{4}{n^2\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_0^\pi = \frac{2(\pi-1)(-1)^{n+1}}{n} - \frac{4}{n^3\pi} (1 - (-1)^n).
\end{aligned}$$

Hledaná Fourierova řada má tedy tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(\pi-1)(-1)^{n+1}}{n} - \frac{4}{n^3\pi} (1-(-1)^n) \right) \sin nx.$$

Pro určení součtu této řady použijeme větu o součtu Fourierovy řady. Nalezená řada je Fourierovou řadou 2π-periodické liché funkce, která je na intervalu $(0, \pi)$ rovna $x^2 - x$. Tato funkce je po částech hladká (její derivace je na $(0, \pi)$ rovna $2x - 1$, což je spojitá funkce s vlastními limitami v $0+$ a $\pi-$). Podle zmíněné věty graf součtu vypadá takto:



Příklad 5.

(a) Například $f(x) = \begin{cases} 5 & x \in \mathbf{Q} \\ 15 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$. Pak totiž pro každé dělení D intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je $s(f, D) = 5$ a $S(f, D) = 15$.

(b) ANO. (Z definice stejnoměrné konvergence snadno plyne, že konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ stejnoměrně na množině A i na množině B, konverguje stejnoměrně i na množině $A \cup B$. V naší situaci $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje stejnoměrně na množině $(0, 1)$, na množině $\{0\}$ a na množině $\{1\}$. Proto konverguje stejnoměrně i na $\langle 0, 1\rangle$.

(c) Například $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$. (Použijeme odmocninové kritérium.)

(d) NE. Například: (M, ρ) je diskrétní prostor, tj. M je množina obsahující alespoň dva body a $\rho(x, y) = 1$ pro $x \neq y$; a je libovolný bod M a $r = 1$. Pak levá strana je rovna M a pravá je rovna $\{a\}$.

(e) Například $(0, 1)$. Není uzavřená, a tedy není kompaktní.