Písemná zkouška z Matematické analýzy I pro informatiky (A)

ZS 2003-2004, paralelky X a Z

Příklad 1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{3n}\right)}{\log\left(1-n+\sqrt{n^2+1}\right)} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n}$$

konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje (v závislosti na parametru $a \in \mathbf{R}$).
(12 bodů)

Příklad 3 : Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \left[\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x\right] \cdot \sin(\pi x) \qquad ([..] \text{ znamená celou část})$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(12 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x+3)e^{\frac{1}{x}}. \qquad \text{(24 bodů)}$$

Příklad 5 : (Každá z otázek (a) až (e) za 1 bod.)

(a) Existuje posloupnost reálných čísel, která má limitu a přitom není omezená ani zdola ani shora? Pokud ano, napište příklad.

(b) Napište příklad posloupnosti $\{a_n\}$ takové, aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergovala a řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ konvergovala.

(c) Nechť funkce f je klesající na intervalu $(0,1)$ a také na intervalu $(1,2)$. Musí pak f být klesající na množině $(0,1) \cup (1,2)$? Pokud ne, uveďte příklad.

(d) Napište příklad funkce f, která splňuje $f'_+(2) = +\infty$ a $f'_-(2) = -\infty$.

(e) Zformulujte větu, podle níž lze spočítat $\lim_{x\to+\infty} \arcsin\frac{x}{x+1}$, a vysvětlete její použití.