

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2004-2005

Příklad 1 : Spočítejte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sin^2 n} - \sqrt{n - \cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočítejte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{(\cos x)^x + 2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočítejte derivaci funkce

$$f(x) = \min\{x^3, x \cdot |x|\}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[5]{3x^5 + 5x^3}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 5 : (Alespoň dvě úlohy je třeba vyřešit bezchybně)

- (a) Najděte všechna reálná řešení rovnice $4^x + 2^x - 20 = 0$.
- (b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice $||x + 1| - 1| \leq 2$.
- (c) Načrtněte graf funkce $f(x) = \sin(2x + 3)$.

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2004-2005

Příklad 1: $\frac{1}{2}$

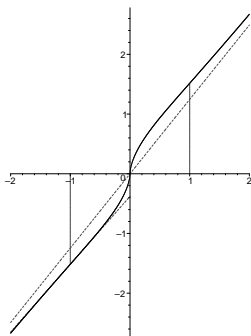
Příklad 2: $\sqrt{2}$

Příklad 3: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na \mathbf{R} ; $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1), \\ -2x & x \in (-1, 0), \\ 2x & x \in (1, +\infty); \end{cases} \quad f'(0) = 0,$

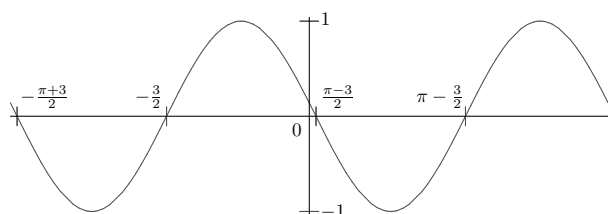
$$f'_-(-1) = f'_-(1) = 3, \quad f'_+(-1) = f'_+(1) = 2.$$

Příklad 4: f je definovaná a spojitá na \mathbf{R} , je lichá, v $+\infty$ má limitu $+\infty$, je rostoucí na \mathbf{R} , $f'(0) = +\infty$, $H_f = \mathbf{R}$, f je konkávní na $\langle 0, 1 \rangle$, konvexní na $\langle 1, +\infty \rangle$, v bodě 1 je inflexní bod. Asymptota v $+\infty$ (i v $-\infty$) je $x \mapsto \sqrt[5]{3} \cdot x$.

Graf:



5(c):



Příklad 5: (a) $x = 2$ (b) $x \in \langle -4, 2 \rangle$