Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (F)
ZS 2004-2005

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(2^n + 3^n + 4^n\right) \cdot \sin\frac{5}{n} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{(x^2)} - 1}}{\operatorname{arctg} x} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (e + |x|)^x$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{4^x - \frac{5}{2}}{(2^x - 2)^2}. \qquad \text{(20 bodů)}$$

Příklad 5 : (Alespoň dvě úlohy je třeba vyřešit bezchybně)

(a) Najděte všechna reálná řešení rovnice $\operatorname{tg}(x+1) = 3\operatorname{cotg}(x+1)$.

(b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice $(1-x)(x+2) > \dfrac{x+2}{1-x}$.

(c) Načrtněte graf funkce $f(x) = \left|\sin x + \dfrac{1}{2}\right|$.

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (F)
ZS 2004-2005

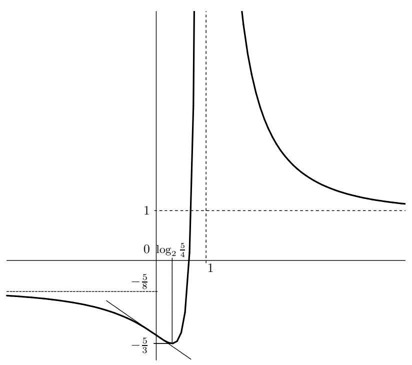
Příklad 1: $10 \log 2$

Příklad 2: Neexistuje (zleva -1, zprava 1).

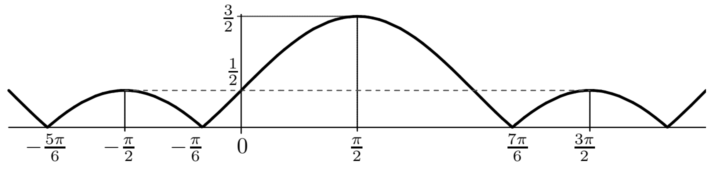
Příklad 3: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$, $f'(x) = (e+|x|)^x \cdot \left(\log(e+|x|) + \frac{|x|}{e+|x|}\right)$ pro $x \in \mathbf{R}$ ($f'(0) = 1$ je třeba spočítat zvlášť)

Příklad 4: $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, f je spojitá v každém bodě D_f. Limita v $-\infty$ je $-\frac{5}{8}$, limita v $+\infty$ je 1, limita v 1 je $+\infty$. f je klesající na $(-\infty, \log_2 \frac{5}{4}\rangle$ a na $(1, +\infty)$, rostoucí na $\langle \log_2 \frac{5}{4}, 1)$; v bodě $\log_2 \frac{5}{4}$ je globální minimum rovné $-\frac{5}{3}$, $H_f = \langle -\frac{5}{3}, +\infty)$. f je konkávní na $(-\infty, 0\rangle$, konvexní na $\langle 0, 1)$ a na $(1, +\infty)$, v bodě 0 je inflexní bod. Asymptota v $-\infty$ je $x \mapsto -\frac{5}{8}$, v $+\infty$ $x \mapsto 1$.

Graf:



5(c):



Příklad 5: (a) $-1 - \frac{\pi}{3} + k\pi$, $-1 + \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (b) $(-2, 0) \cup (1, 2)$