

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2008-2009

Příklad 1 : Spočítejte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n + \frac{2}{n}\right)^{30} - \left(n + \frac{1}{n}\right)^{30}}{\sqrt{(2 + n^7)^8 - 2^8}} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočítejte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + x^3 + 3^x + x^x)}{\log(1 + x^3 + 3^x) \cdot \log(1 + x^3)} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočítejte derivaci funkce

$$f(x) = [x] \cdot \sqrt[3]{x^2 - 9} \quad [\dots] \text{ znamená celou část}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x + \log 2) \cdot 2^{-\frac{5}{x}}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2008-2009

Příklad 1: 30

Příklad 2: $\frac{1}{3 \log 3}$

Příklad 3: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá v každém bodě $\mathbf{R} \setminus (\mathbf{Z} \setminus \{-3, 3\})$, v bodech $\mathbf{Z} \setminus \{-3, 3\}$ je spojitá zprava a nespojitá zleva. $f'(x) = \frac{2}{3}x(x^2 - 9)^{-2/3}$ pro $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$; $f'(-3) = f'(3) = +\infty$; pro $k \in \mathbf{Z} \setminus \{-3, 3\}$ je $f'_+(k) = \frac{2}{3}k^2(k^2 - 9)^{-2/3}$ a $f'_-(k) = \begin{cases} +\infty, & |k| > 3, \\ -\infty, & |k| < 3. \end{cases}$

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; f je spojitá v každém bodě D_f ; limita v $-\infty$ je $-\infty$, v $+\infty$ je $+\infty$, v 0 zleva $+\infty$, v 0 zprava 0. f je rostoucí na $(-\infty, -\frac{5+\sqrt{5}}{2} \log 2)$, klesající na $(-\frac{5+\sqrt{5}}{2} \log 2, -\frac{5-\sqrt{5}}{2} \log 2)$, rostoucí na $(-\frac{5-\sqrt{5}}{2} \log 2, 0)$, rostoucí na $(0, +\infty)$. V bodě $-\frac{5+\sqrt{5}}{2} \log 2$ je lokální maximum, v bodě $-\frac{5-\sqrt{5}}{2} \log 2$ lokální minimum, $H_f = \mathbf{R}$. f je konkávní na $(-\infty, -\frac{5}{3} \log 2)$, konvexní na $(-\frac{5}{3} \log 2, 0)$, konvexní na $(0, +\infty)$. V bodě $-\frac{5}{3} \log 2$ je inflexní bod. Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y = x - 4 \log 2$.

Graf:

