

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (C)
ZS 2008-2009

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + n^{n+1} + \dots + n^{2n}} \cdot \left(1 - \cos \frac{3}{n}\right) \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \log(\sin^2 x)}{\sqrt{1 + \sin x}} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = |\cos 2x| \cdot (\operatorname{tg} x - 1)$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{4 - 3\sqrt[3]{x-1}}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (C)
ZS 2008-2009

Příklad 1: $\frac{9}{2}$

Příklad 2: Limita neexistuje, zleva $-\sqrt{2}$, zprava $\sqrt{2}$.

Příklad 3: $D_f = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, f je spojitá v každém bodě D_f . $f'(x) = -2 \sin 2x \cdot (\operatorname{tg} x - 1) \cdot \operatorname{sgn}(\cos 2x) + |\cos 2x| \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi) \cup (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi) \cup (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$; $f'(\frac{\pi}{4} + k\pi) = 0$, $f'_+(-\frac{\pi}{4} + k\pi) = -4$, $f'_-(-\frac{\pi}{4} + k\pi) = 4$ pro $k \in \mathbf{Z}$.

Příklad 4: f je definovaná a spojitá na \mathbf{R} , limita v $-\infty$ je $+\infty$, limita v $+\infty$ je $-\infty$, f je klesající na \mathbf{R} , $H_f = \mathbf{R}$, $f'(1) = f'(\frac{91}{27}) = +\infty$, f je konkávní na $(-\infty, 1)$, konvexní na $\langle 1, 2 \rangle$, konkávní na $\langle 2, \frac{91}{27} \rangle$, konvexní na $\langle \frac{91}{27}, +\infty \rangle$, v bodě 2 je inflexní bod, f nemá asymptoty.

Graf:

