

**Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (E)**  
**ZS 2008-2009**

---

**Příklad 1 :** Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + \sin n} - \sqrt{n^3 + 3n}}{\sqrt[4]{n^2 + n} - \sqrt[4]{n^2 + \arctg n}} \quad (15 \text{ bodů})$$

**Příklad 2 :** Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{2} \right)^{\operatorname{tg}^2 2x} \quad (15 \text{ bodů})$$

**Příklad 3 :** Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{1 + \cos \pi x}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(10 bodů)

**Příklad 4 :** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \left( 3^{x+2|x|} - 9 \right)^2. \quad (20 \text{ bodů})$$

---

**Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (E)**  
**ZS 2008-2009**

---

**Příklad 1:**  $-6$

**Příklad 2:**  $\sqrt{e}$

**Příklad 3:**  $f$  je definovaná a spojitá na  $\mathbf{R}$ .  $f'(x) = 2x\sqrt{1 + \cos \pi x} - \frac{\pi(x^2-1)\sin \pi x}{2\sqrt{1 + \cos \pi x}}$  pro  $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k + 1 : k \in \mathbf{Z}\}$ ;  $f'(1) = f'(-1) = 0$ ; pro  $k \in \mathbf{Z} \setminus \{-1, 0\}$  je  $f'_-(2k + 1) = -2\sqrt{2}k(k + 1)\pi$ ,  $f'_+(2k + 1) = 2\sqrt{2}k(k + 1)\pi$ .

**Příklad 4:**  $D_f = \mathbf{R}$ ,  $f$  je spojitá na  $\mathbf{R}$ , limita v  $-\infty$  i v  $+\infty$  je  $+\infty$ .  $f$  je klesající na  $(-\infty, -2)$ , rostoucí na  $(-2, 0)$ , klesající na  $(0, \frac{2}{3})$ , rostoucí na  $(\frac{2}{3}, +\infty)$ ;  $f'_-(0) = 16 \log 3$ ,  $f'_+(0) = -48 \log 3$ ; v bodech  $-2$  a  $\frac{2}{3}$  má  $f$  globální minimum rovné  $0$ , v bodě  $0$  má lokální maximum;  $H_f = (0, +\infty)$ .  $f$  je konvexní na  $(-\infty, -\frac{\log(9/2)}{\log 3})$ , konkávní na  $(-\frac{\log(9/2)}{\log 3}, 0)$ , konkávní na  $(0, \frac{\log(9/2)}{3 \log 3})$ , konvexní na  $(\frac{\log(9/2)}{3 \log 3}, +\infty)$ . V bodech  $-\frac{\log(9/2)}{\log 3}$  a  $\frac{\log(9/2)}{3 \log 3}$  jsou inflexní body.  $f$  nemá asymptoty.

Graf:

