Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (C)

LS 2008-2009

Příklad 1 : Určete hodnost následující matice v závislosti na parametrech $x, y \in \mathbf{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 17 & 13 & 11 \\ x & 5 & 3 & 2 \\ 11 & 13 & 17 & y \end{pmatrix}$$ (10 bodů)

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \log \frac{1-|x|}{1-|y|},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[5,-5,f(5,-5)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\cos(y + xe^x) + \sin(y - xe^x) = -1$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,\pi]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = xyz, \quad M = \left\{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, xz \le \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$ (18 bodů)

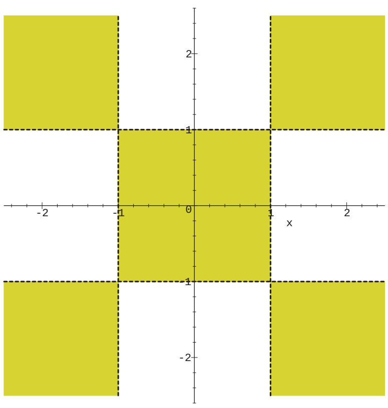
Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \right)^{n(n+1)}$$ (12 bodů)

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (C)

LS 2008-2009

Příklad 1: Je-li $x = 6$ nebo $y = \frac{497}{23}$, je hodnost 3, ve všech ostatních případech je hodnost 4.
Příklad 2: $D_f = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : (|x| < 1 \ \& \ |y| < 1) \text{ nebo } (|x| > 1 \ \& \ |y| > 1)\}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\operatorname{sgn} x}{1-|x|}$ pro $[x,y] \in D_f$, $x \neq 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\operatorname{sgn} y}{1-|y|}$ pro $[x,y] \in D_f$, $y \neq 0$. Zbývající parciální derivace (tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \in (-1,1)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \in (-1,1)$) neexistují.
Definiční obor:



Příklad 3: $f'(0) = 1$, $f''(0) = 6$, rovnice tečny je $y = \pi + x$.
Příklad 4: Maximum $\frac{4}{9}\sqrt{6}$ v bodech $[\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \mp\sqrt{\frac{2}{3}}]$, minimum $-\frac{4}{9}\sqrt{6}$ v bodech $[\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \mp\sqrt{\frac{2}{3}}]$ (znaménka odpovídající). M je kompaktní.
Příklad 5: Konverguje absolutně. Lze použít Cauchyovo odmocninové kritérium.