Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (E)
LS 2008-2009

Příklad 1 : Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 9 & 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^4},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[5, 2, f(5,2)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\sin(\cos(x+y)) + \cos(\sin(x-y)) = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(\frac{\pi}{4})$ a $f''(\frac{\pi}{4})$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $\frac{\pi}{4}$. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = x + z, \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x^2 - y^2 = 0\right\} \qquad (18 \text{ bodů})$$

Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

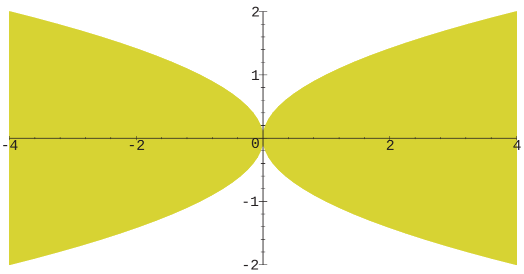
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{2}{n} \cos\frac{1}{n} \qquad (12 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (E)
LS 2008-2009

Příklad 1: Pro $\mathbf{b}_1$: $[1, -2-t, 1-t, t]$, $t \in \mathbf{R}$. Pro $\mathbf{b}_2$: $[1, -4-t, -t, t]$, $t \in \mathbf{R}$. Pro $\mathbf{b}_3$ nemá řešení.

Příklad 2: $D_f = \{[x,y] : |y| \le \sqrt{|x|}\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^4}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2y^3}{\sqrt{x^2-y^4}}$, obě parciální derivace v bodech splňujících $|y| < \sqrt{|x|}$. Z parciálních derivací v bodech splňujících $|y| = \sqrt{|x|}$ má smysl počítat jen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, která však neexistuje. Zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, protože funkce není definovaná na žádné úsečce příslušného směru. Tečná rovina: $z = 3 + \frac{5}{3}(x-5) - \frac{16}{3}(y-2)$.

Definiční obor:



Příklad 3: $f'(\frac{\pi}{4}) = -1$, $f''(\frac{\pi}{4}) = -4$, rovnice tečny je $y = \frac{\pi}{4} - (x - \frac{\pi}{4})$.

Příklad 4: Minimum $-\sqrt{6}$ v bodech $[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}]$, maximum $\sqrt{6}$ v bodech $[\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}]$. M je kompaktní.

Příklad 5: Konverguje neabsolutně. Pro konvergenci lze použít Leibnizovo kritérium, pro divergenci řady absolutních hodnot lze použít limitní srovnávací kritérium a srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.