Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2010-2011

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^2+1}\right]+\left[\sqrt[3]{n^3+1}\right]+\left[\sqrt[4]{n^4+1}\right]}{\log\left(1^n+2^n+\cdots+n^n\right)}\cdot\log n \qquad [\ldots] \text{ znamená celou část} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (2\cos x)^{\frac{\sqrt{3}}{\pi-3x}} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x)=\sqrt[3]{2^{|x^2-1|}-2}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=x\cdot\exp\left(-\frac{1}{\log^2 x}\right). \qquad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (A)
ZS 2010-2011

Příklad 1: 3 (lze použít větu o policajtech)
Příklad 2: e
Příklad 3: $D_f=\mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$. $f'(x)=\dfrac{2^{|x^2-1|}\cdot\log 2\cdot\operatorname{sgn}(x^2-1)\cdot 2x}{3\sqrt[3]{\left(2^{|x^2-1|}-2\right)^2}}$ pro $x\in\mathbf{R}\setminus\{-\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2}\}$; $f'(-\sqrt{2})=-\infty$, $f'_-(-1)=-\frac{2}{3}\log 2$, $f'_+(-1)=\frac{2}{3}\log 2$, $f'_-(0)=+\infty$, $f'_+(0)=-\infty$, $f'_-(1)=-\frac{2}{3}\log 2$, $f'_+(1)=\frac{2}{3}\log 2$, $f'(\sqrt{2})=+\infty$.
Příklad 4: $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$, f je spojitá v každém bodě D_f. Limita v 0 zprava je 0, limita v 1 je 0, limita v $+\infty$ je $+\infty$. Funkce f je rostoucí na $(0,\exp(-\sqrt[3]{2})\rangle$, klesající na $\langle\exp(-\sqrt[3]{2}),1)$, rostoucí na $(1,+\infty)$; v bodě $\exp(-\sqrt[3]{2})$ je lokální maximum, $H_f=(0,+\infty)$. Funkce f je konkávní na $(0,\exp(1-\sqrt{3}))$, konvexní na $(\exp(1-\sqrt{3}),1)$, konvexní na $(1,e)$, konkávní na $(e,\exp(1+\sqrt{3}))$, konvexná na $(\exp(1+\sqrt{3}),+\infty)$; inflexní body jsou $\exp(1-\sqrt{3})$, e, $\exp(1+\sqrt{3})$. Asymptota v $+\infty$ neexistuje (v $-\infty$ ji nemá smysl počítat). Graf: