

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2010-2011

Příklad 1 : Spočítejte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n + \left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^n} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočítejte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^{(2^x)} - 16}{\sqrt{1 - \cos(2\pi x)}} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočítejte derivaci funkce

$$f(x) = (x - [x]) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad [\dots] \text{ znamená celou část}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3}}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2010-2011

Příklad 1: 3 (lze použít větu o policajtech)

Příklad 2: Limita neexistuje. Limita zleva je $-\frac{32}{\pi}\sqrt{2} \cdot \log^2 2$, limita zprava je $\frac{32}{\pi}\sqrt{2} \cdot \log^2 2$.

Příklad 3: $D_f = \mathbf{R}$. f je spojitá v každém bodě $\mathbf{R} \setminus \{k \in \mathbf{Z} : k \text{ liché}\}$; v bodech $k \in \mathbf{Z}$ liché je spojitá zprava a nespojitá zleva. Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ je $f'(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{\pi}{2}(x - [x]) \cos(\frac{\pi}{2}x)$. Pro $k \in \mathbf{Z}$ sudé je $f'_+(k) = 0$ a $f'_-(k) = (-1)^{k/2} \cdot \frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & k = 4l, l \in \mathbf{Z}, \\ -\frac{\pi}{2} & k = 4l + 2, l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$ Pro $k \in \mathbf{Z}$ liché je

$$f'_+(k) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} 1 & k = 4l + 1, l \in \mathbf{Z}, \\ -1 & k = 4l + 3, l \in \mathbf{Z}; \end{cases} \text{ a } f'_-(k) = \begin{cases} -\infty & k = 4l + 1, l \in \mathbf{Z}, \\ +\infty & k = 4l + 3, l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{27\}$, f je spojitá v každém bodě D_f , limita v $-\infty$ je $-\infty$, limita v $+\infty$ je $+\infty$, limita v 27 zleva $-\infty$ a zprava $+\infty$. f je rostoucí na $(-\infty, 0)$, klesající na $(0, 27)$, klesající na $(27, \frac{1000}{27})$, rostoucí na $(\frac{1000}{27}, +\infty)$; $f'(0) = 0$ (je třeba dopočítat zvlášť), v bodě 0 je lokální maximum (hodnota 0), v bodě $\frac{1000}{27}$ lokální minimum (hodnota $\frac{1000}{27} \sqrt[3]{10}$); $H_f = (-\infty, 0) \cup (\frac{1000}{27} \sqrt[3]{10}, +\infty)$. f je konkávní na $(-\infty, 27)$, konvexní na $(27, 125)$, konkávní na $(125, +\infty)$. V bodě 125 je inflexní bod. f nemá asymptoty. Graf:

