Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (C)
ZS 2010-2011

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(n^7+3\right)^8-\left(n^8+2\right)^7-24\left(n^7+1\right)^7\right)\cdot\left(\left(1+\frac{1}{16n^6}\right)^8-\left(1+\frac{1}{18n^8}\right)^6\right)^8 \qquad (15\text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(8^x+4^x+2^x+1\right)\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^6+x+3}-\sqrt{x^6-x-3}\right) \qquad (15\text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x)=\left[\frac{2}{\pi}\arccos x\right]\cdot\arcsin x \qquad [\ldots]\text{ znamená celou část}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=\frac{9^x-54}{\left(3^x-12\right)^2}. \qquad (20\text{ bodů})$$

- -

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (C)
ZS 2010-2011

Příklad 1: $-\frac{7}{128}$
Příklad 2: $\frac{3}{2}\log 2$
Příklad 3: $D_f=\langle -1,1\rangle$, f je spojitá na intervalu $(-1,1\rangle$, v bodě -1 není spojitá zprava.
$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x\in(-1,0),\\ 0, & x\in(0,1);\end{cases}$ $f'_+(-1)=+\infty$, $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$, $f'_-(1)=0$.
Příklad 4: $D_f=\mathbf{R}\setminus\{\log_3 12\}$, f je spojitá v každém bodě D_f. Limita v $-\infty$ je $-\frac{3}{8}$, limita v $\log_3 12$ je $+\infty$, limita v $+\infty$ je 1. Funkce f je klesající na $(-\infty,\log_3\frac{9}{2}\rangle$, rostoucí na $\langle\log_3\frac{9}{2},\log_3 12)$, klesající na $(\log_3 12,+\infty)$; v bodě $\log_3\frac{9}{2}$ je globální minimum – hodnota je $-\frac{3}{5}$; $H_f=\langle-\frac{3}{5},+\infty)$. Funkce f je konkávní na $(-\infty,1)$, konvexní na $(1,\log_3 12)$, konvexní na $(\log_3 12,+\infty)$, v bodě 1 je inflexní bod. Asymptota v $+\infty$ je $y=1$, asymptota v $-\infty$ je $y=-\frac{3}{8}$.
Graf: