

Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (D)
ZS 2010-2011

Příklad 1 : Spočítejte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^3 + 3 \cdot \sqrt[5]{n^2 + 1}} - \sqrt[5]{n^3 + 2 \cdot \sqrt[5]{n + 1}}}{1 - \cos \frac{3}{n}} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočítejte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \right)^{\cot^2(\pi x)} \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočítejte derivaci funkce

$$f(x) = \sqrt{1 - (x^2 - 1)^4}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 7x}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (D)
ZS 2010-2011

Příklad 1: $\frac{2}{15}$

Příklad 2: $\exp\left(\frac{1}{2\pi^2}\right)$

Příklad 3: $D_f = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$, f je spojitá na D_f . $f'(x) = -\frac{4x(x^2-1)^3}{\sqrt{1-(x^2-1)^4}}$ pro $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$;
 $f'_+(-\sqrt{2}) = +\infty$, $f'_-(0) = -2$, $f'_+(0) = 2$, $f'_-(\sqrt{2}) = -\infty$.

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na \mathbf{R} , limita v $-\infty$ je $-\infty$, limita v $+\infty$ je $+\infty$. f má vlastní derivaci na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f'(0) = +\infty$; f je rostoucí na $(-\infty, -\frac{7}{3})$, klesající na $\langle -\frac{7}{3}, -1 \rangle$, rostoucí na $\langle -1, +\infty \rangle$; v bodě $-\frac{7}{3}$ má lokální maximum, v bodě -1 lokální minimum, $H_f = \mathbf{R}$. f je konvexní na $(-\infty, -7)$, konkávní na $(-7, -\frac{7}{4})$, konvexní na $(-\frac{7}{4}, 0)$, konkávní na $(0, +\infty)$, inflexní body jsou -7 a $-\frac{7}{4}$. Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y = x + \frac{5}{3}$.

Graf:

