Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (E)
ZS 2010-2011

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+\cos\frac{2}{n}}}{\sqrt[4]{n^2+\sin\frac{3}{n}}-\sqrt{n}} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{\pi}{x \operatorname{arccotg}^2 x}} \qquad (15 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \arccos\left(\min\left\{2x^2, x+1\right\}\right)$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).
(10 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{8x}{x^2-25}. \qquad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (E)
ZS 2010-2011

Příklad 1: $\frac{4}{3}$
Příklad 2: $\frac{1}{e^2}$
Příklad 3: $D_f = \langle -2, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$, f je spojitá na D_f. Pro $x \in (-2, -\frac{1}{2})$ je $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$, pro $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ je $f'(x) = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}$; $f'_+(-2) = -\infty$, $f'_-(-\frac{1}{2}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $f'_+(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $f'_-(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\infty$
Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}\setminus\{-5,5\}$, f je lichá, stačí tedy vyšetřit na $\langle 0,5)\cup(5,+\infty)$. $f(0)=0$, limita v bodě 5 zleva je $-\frac{\pi}{2}$, limita v bodě 5 zprave je $\frac{\pi}{2}$, limita v $+\infty$ je 0. f je klesající na $\langle 0,5)$ a na $(5,+\infty)$ (z lichosti plyne, že je klesající na $(-5,5)$ i na $(-\infty,-5)$, lokální extrémy nemá, $H_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. f je konkávní na $(0,\sqrt{5})$, konvexní na $(\sqrt{5},5)$, konvexní na $(5,+\infty)$; symetricky na záporné poloose; inflexní body jsou -5, 0 a 5. Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y=0$.
Graf: