Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (C)

LS 2010-2011

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice $\mathbb{A}$ a matice $\mathbb{B}^T\mathbb{A}$, kde matice $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením prvního sloupce číslem 17 a pátého sloupce číslem $\frac{1}{5}$.:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 13 & 23 & 24 & 25 \\ 4 & 14 & 24 & 34 & 35 \\ 5 & 15 & 25 & 35 & 50 \end{pmatrix}$$ (10 bodů)

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin \frac{y^2+7}{x+5},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[9,0,f(9,0)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$4\,\mathrm{arctg}(x-y^2) + \log(3y-x) = \pi$$

určuje v jistém okolí bodu $[5,2]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(5)$ a $f''(5)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 5. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2, \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9, x+z \geq 1\right\}$$ (18 bodů)

Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$$ (12 bodů)

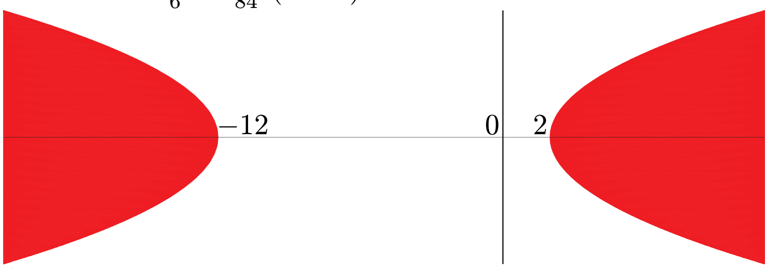
Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (C)

LS 2010-2011

Příklad 1: $\det\mathbb{A} = 25\cdot 3^5$, $\det(\mathbb{B}^T\mathbb{A}) = 17\cdot 5^3\cdot 3^{10}$.

Příklad 2: $D_f = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : x \geq y^2+2 \text{ nebo } x \leq -y^2-12\}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y^2+7}{x+5}\right)^2}}\cdot\frac{y^2+7}{(x+5)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y^2+7}{x+5}\right)^2}}\cdot\frac{2y}{x+5}$, obě parciální derivace pro $x > y^2+2$ nebo $x < -y^2-12$. V bodech, kde $x = y^2+2$ nebo $x = -y^2-12$ parciální derivace nemá smysl počítat, protože f není definována na žádné úsečce příslušného směru. Tečná rovnina: $z = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{12}}{84}(x-9)$.

Definiční obor:



Příklad 3: $f'(5) = \frac{1}{5}$, $f''(5) = -\frac{2}{25}$, rovnice tečny je $y = 2 + \frac{1}{5}(x-5)$.

Příklad 4: Maximum 9 v bodě $[3,0,0]$, minimum $-\frac{25}{3}$ v bodech $[\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{19}, \frac{2}{3}]$.

Příklad 5: Diverguje. Není splněna nutná podmínka konvergence.