Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (D)
LS 2010-2011

Příklad 1 : Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 3 & 1 & 27 & 9 \\ 1 & 3 & 27 & 9 \\ 3 & 1 & 9 & 27 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{y^6 - x^3},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[0,2,f(0,2)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\log(x+y^3) + \exp(x+2y) = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[2,-1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(2)$ a $f''(2)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 2. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = xyz, \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 4, x^2+2z^2 = 3\right\} \qquad (18 \text{ bodů})$$

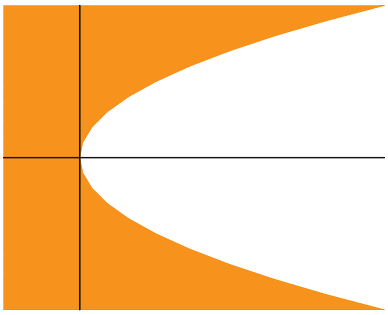
Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^{2n} \cdot \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^n \qquad (12 \text{ bodů})$$

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (D)
LS 2010-2011

Příklad 1: Pro $\mathbf{b}_1$ $[-9t+\frac{1}{2}, -9t, t+\frac{1}{18}, t]$, $t \in \mathbf{R}$; pro $\mathbf{b}_2$ $[-9t+\frac{1}{4}, -9t+\frac{1}{4}, t, t]$, $t \in \mathbf{R}$; pro $\mathbf{b}_3$ nemá řešení.

Příklad 2: $D_f = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : x \le y^2\}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{y^6-x^3}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^5}{\sqrt{y^6-x^3}}$, obě parciální derivace pro $x < y^2$. Z parciálních derivací v bodech splňujících $x = y^2$ nebo má smysl počítat jen $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, vyjde $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, protože funkce není definovaná na žádné úsečce příslušného směru. Tečná rovina: $z = 8 + 12(y-2)$.
Definiční obor:



Příklad 3: $f'(2) = -\frac{2}{5}$, $f''(2) = \frac{24}{125}$, rovnice tečny je $y = -1 - \frac{2}{5}(x-2)$.

Příklad 4: Maximum $\frac{\sqrt{35+13\sqrt{13}}}{3\sqrt{3}}$ v bodech $[\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{3}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{3}}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{6}}]$, $[-\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{3}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{3}}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{6}}]$, $[-\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{3}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{3}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{6}}]$ a $[\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{3}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{3}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{6}}]$;
minimum $-\frac{\sqrt{35+13\sqrt{13}}}{3\sqrt{3}}$ v bodech $[-\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{3}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{3}}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{6}}]$, $[\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{3}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{3}}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{6}}]$, $[\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{3}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{3}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{6}}]$ a $[-\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{3}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{3}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{6}}]$.

Příklad 5: Konverguje absolutně. Lze použít Cauchyovo odmocninové kritérium.