Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (B)
ZS 2013-2014

Příklad 1: Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{\cos z}{z + \pi}$$

v maximálních možných mezikružích o středu 0. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 3x - 10}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(20 bodů)}$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}(x^3 + 8)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(20 bodů)}$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (B)
ZS 2013-2014
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Na $U(0,\pi)$ je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k)!\cdot\pi^{n-2k+1}}\right) z^n$; na $P(0,\pi,+\infty)$ je
$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=\max\{0,\lceil\frac{n+1}{2}\rceil\}}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}\pi^{2k-n-1}}{(2k)!}\right) z^n.$

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) f je holomorfní na $\mathbf{C}\setminus\{-\pi\}$, tedy na $U(0,\pi)$ lze vyjádřit mocninnou řadou, na $P(0,\pi,\infty)$ Laurentovou řadou. (1 bod)
2) $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$ na $\mathbf{C}$. (1 bod)
3) $\frac{1}{z+\pi} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\pi^{m+1}} z^m, & z \in U(0,\pi) \text{ (1 bod)},\\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\pi^{m-1}}{z^m}, & z \in P(0,\pi,+\infty) \text{ (2 body)}. \end{cases}$
4) Výsledek dostaneme vynásobením příslušných řad. (5 bodů, z toho 2 body na $U(0,\pi)$ a 3 body na $P(0,\pi,+\infty)$).

Příklad 2: Výsledek: $-\frac{2}{7}\pi$

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (dokonce absolutně): Integrovaná funkce je spojitá na $\mathbf{R} \setminus \{-2, 5\}$, v bodech -2 a 5 má vlastní limitu, v okolí $\pm\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)
3) Položme $g(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^2-3z-10}$. Pak g je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-2, 5\}$. Oba póly jsou násobnosti 1. (3 body)
4) Uvažme křivku $\varphi_{r,R} = \psi_R \dot{+} [-R, -2-r] \dot{+} (\dot{-}\, \eta_r) \dot{+} [-2+r, 5-r] \dot{+} (\dot{-}\, \theta_r) \dot{+} [5+r, R]$, kde $R > 6$, $r \in (0, 1)$, $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $\eta_r(t) = -2 + re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $\theta_r(t) = 5 + re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. (2 body)
5) Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_{R,r}} g$: Z pólů určených v bodě 3) není „uvnitř" žádný (v obou je index 0). Integrál je tedy roven 0. (3 body)
6) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$:
(i) $\int_{\psi_R} g \to 0$ pro $R \to \infty$ podle Jordanova lemmatu. (2 body)
(ii) $\lim_{r\to 0+} \int_{\eta_r} g = \pi i \operatorname{res}_{-2} g$ podle jistého lemmatu (g má v -2 pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $-\frac{1}{7}$, limita je tedy $-\frac{\pi}{7}i$. (3 body)
(ii) $\lim_{r\to 0+} \int_{\theta_r} g = \pi i \operatorname{res}_{5} g$ podle téhož lemmatu (g má v 5 pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $-\frac{1}{7}$, limita je tedy $-\frac{\pi}{7}i$. (3 body)
(iii) Imaginární část integrálu přes tři úsečky z definice $\varphi_{r,R}$ má limitu (pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^2-3x-10}\,\mathrm{d}x$. (2 body)
7) Kombinací předchozího – výsledků z bodu 5) a 6) a bodu 2) dostaneme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{\pi\sqrt[4]{2}}{12}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje dle srovnávacího kritéria. (1 bod)
2) Substitucí $x = e^y$ převedeme na $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3y/4}}{e^{3y}+8}\,\mathrm{d}y$. (2 body)
3) Nechť φ_R je kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$. Spočteme integrál funkce z bodu 2) podél φ_R podle reziduové věty (1 bod):
(i) Funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : 3z \in \operatorname{Log}(-8)\} = \mathbb{C} \setminus \{\ln 2 + i\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$. Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Pro $R > \ln 2$ jsou z nich „uvnitř křivky" právě body $z_1 = \ln 2 + i\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \ln 2 + i\pi$ a $z_3 = \ln 2 + i\frac{5}{3}\pi$. (Tj. v těchto třech je index 1, v ostatních je index 0.) (3 body)
(ii) Reziduum v bodě z_1 je $-\frac{\sqrt[4]{8}}{24}e^{\frac{\pi}{4}i}$, reziduum v bodě z_2 je $-\frac{\sqrt[4]{8}}{24}e^{\frac{3}{4}\pi i}$, reziduum v bodě z_3 je $-\frac{\sqrt[4]{8}}{24}e^{\frac{5}{4}\pi i}$. (5 bodů)
(iii) Zmíněný křivkový integrál je tedy roven $-i \cdot \frac{\pi\sqrt[4]{8}}{12}e^{\frac{3}{4}\pi i} = \frac{\pi\sqrt[4]{2}}{12}(1+i)$. (4 body)
4) Provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. Integrály přes obě svislé úsečky mají limitu 0, integrál přes $[-R, R]$ má limitu I, integrál přes $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ má limitu $-e^{\frac{3}{2}\pi i}I = iI$. (2 body)
5) Dostáváme tedy $(1+i)I = \frac{\pi\sqrt[4]{2}}{12}(1+i)$, odkud spočteme výsledek. (2 body)