Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (C)
ZS 2013-2014

Příklad 1: Uvažte křivku

$$\varphi = \psi_1 \dotplus \left[\frac{10}{3}\pi - \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\right] \dotplus \psi_2 \dotplus \left[4\pi - \frac{i}{2}, 4\pi + \frac{i}{2}\right] \dotplus \left[4\pi + \frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right] \dotplus \left[\frac{i}{2}, i\right],$$

kde

$$\psi_1(t) = t + i\cos t, \qquad t \in \left[0, \frac{10}{3}\pi\right],$$
$$\psi_2(t) = t - \frac{3}{2}i + i\cos t, t \in [0, 4\pi].$$

Načrtněte $\langle\varphi\rangle$ a určete hodnotu indexu vzhledem k φ v jednotlivých komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. (10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

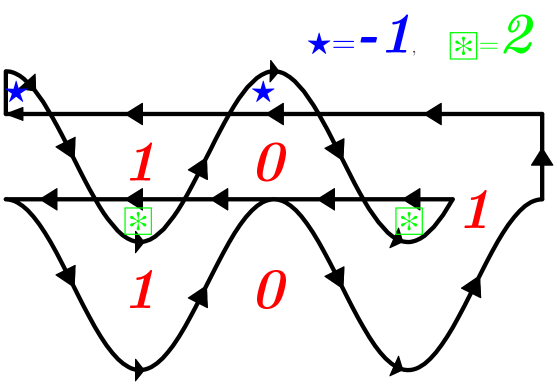
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx \qquad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{13 - 12\sin x + 4\cos x}\, dx \qquad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (C)
ZS 2013-2014
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Výsledek:



Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Načrtneme $\langle\psi_1\rangle$, což je graf funkce kosinus na intervalu $[0, \frac{10}{3}\pi]$, začíná v bodě i a končí v bodě $\frac{10}{3}\pi - \frac{i}{2}$. (2 body)
2) Navážeme vodorovnou úsečkou spojující body $\frac{10}{3}\pi - \frac{i}{2}$ a $-\frac{i}{2}$. (1/2 bodu)
3) Doplníme $\langle\psi_2\rangle$, graf funkce $x \mapsto \cos x - \frac{3}{2}$ na intervalu $[0, 4\pi]$, začíná v bodě $-\frac{i}{2}$ a končí v bodě $4\pi - \frac{i}{2}$. (2 body)
4) Doplníme zbývající tři úsečky. (1/2 bodu)
5) V obrázku vyznačíme orientaci křivky a určíme index – v neomezené komponentě je roven 0 (1 bod), v ostatních komponentách ho určíme dle „propichovací věty“ (4 body).

Příklad 2: Výsledek: π.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje (funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, použije se srovnávací kritérium). (1 bod)
2) Označme integrovanou funkci f. Pro $R > 0$ nechť $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, a $\varphi_R = [-R, R] \dotplus \psi_R$. Spočteme integrál z f podél φ_R dle reziduové věty a provedeme limitní přechod pro $R \to \infty$. (3 body)
3) f je racionální funkce s póly v bodech i, $-i$, $2i$ a $-2i$. Všechny póly jsou násobnosti 1. Přitom body $-i$ a $-2i$ leží „vně křivky“, je v nich index nula, v pólech i a $2i$ je (pro $R > 2$) index 1. (4 body)
4) Reziduum v bodě i je $\frac{5}{6} - \frac{1}{2}i$, reziduum v bodě $-i$ je $-\frac{5}{6}$. (5 bodů)
5) Pro $R > 2$ je dle reziduové věty $\int_{\varphi_R} f = \pi$. (4 body)
6) $\lim_{R\to\infty} \int_{\psi_R} f = 0$, limita integrálu přes $[-R, R]$ je rovna integrálu ze zadání. Tím dostáváme výsledek. (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $\frac{\pi}{3}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Nechť φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 1. Pak integrál ze zadání je roven $\int_\varphi \frac{-z^2-1}{2z^2(z^2(2i-6)+13iz+6+2i)}\,\mathrm{d}z$. Ten spočítáme podle reziduové věty. (5 bodů)
2) Integrovaná funkce je funkce racionální, s póly v bodech 0, $-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$ a $-\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$; přičemž v nule je pól násobnosti 2 a další dva póly jsou násobnosti 1. Bod $-\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$ je mimo jednotkový kruh (index v něm je 0) a body 0 a $-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$ jsou uvnitř jednotkového kruhu (index je v nich 1). (4 body)
3) Spočteme rezidua:
(i) Reziduum v bodě 0 je $\frac{39}{400} + \frac{13}{100}i$. (4 body)
(ii) Reziduum v bodě $-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$ je $-\frac{39}{400} - \frac{89}{300}i$. (4 body)
4) Aplikací reziduové věty dostaneme výsledek. (3 body)