Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (B)
ZS 2017-2018

Příklad 1: Spočtěte přírůstek logaritmu funkce $\operatorname{tg}(z)$ podél kladně orientované kružnice o středu 0 a poloměru $r > 0$ v závislosti na r.

(10 bodů)

Příklad 2: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3}}{x^3+27}\,\mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 3: Spočtěte integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{(4x^2-1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z Úvodu do komplexní analýzy (B)
ZS 2017-2018
Výsledky a návod k řešení

Příklad 1: Pokud $r = k \cdot \frac{\pi}{2}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak přírůstek není definován. Je-li $r \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak je přírůstek roven $2\pi i$; pokud je $r \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, je přírůstek roven $-2\pi i$.

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Přírůstek logaritmu funkce podél křivky je definován, pokud je funkce na obrazu křivky spojitá a nenulová. Funkce tg je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, ve vyloučených bodech má póly. Proto, pokud některý z pólů leží na kružnici ze zadání (což nastává, pokud $r = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), není přírůstek definován. Dále, funkce tg má kořeny v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Proto, pokud některý z kořenů leží na kružnici ze zadání (což nastává, pokud $r = k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$), není přírůstek definován. (2 body)
2) V ostatních případech je přírůstek definován a je roven integrálu z funkce $\frac{\operatorname{tg}' z}{\operatorname{tg} z}$ podél příslušné křivky. Tento integrál lze spočítat pomocí reziduové věty. (1 bod)
3) Platí: $\frac{\operatorname{tg}' z}{\operatorname{tg} z} = \frac{1}{\sin z \cdot \cos z}$. Tato funkce je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$, ve vyloučených bodech má póly násobnosti 1. Přitom reziduum je rovno 1 v bodech $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a je rovno -1 v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (4 body)
4) Výsledek dostaneme aplikací reziduové věty. (3 body)

Příklad 2: Výsledek: $-2\pi \cdot 3^{-10/3}(\sin \frac{4}{9}\pi + \sin \frac{2}{9}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})$

Postup a orientační bodové hodnocení:
1) Integrál konverguje absolutně: Integrovaná funkce je spojitá na $[0, +\infty)$, u $+\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)
2) Substitucí $x = e^y$ převedeme na $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{5y/3}}{e^{3y}+27}\,\mathrm{d}y$. (2 body)

3) Nechť φ_R je kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$. Spočteme integrál funkce z bodu 2) podél φ_R podle reziduové věty: (1 bod)

(i) Funkce je holomorfní na
$$\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} : 3z\in \mathrm{Log}(-27)\} = \mathbb{C}\setminus\{\ln 3 + i\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{2}{3}k\pi i : k\in\mathbb{Z}\}.$$
Ve vyloučených bodech jsou póly násobnosti 1. Pro $R > \ln 3$ jsou z nich „uvnitř křivky" právě body $z_1 = \ln 3 + i\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \ln 3 + i\pi$ a $z_3 = \ln 3 + i\frac{5}{3}\pi$. (Tj. v těchto třech je index 1, v ostatních je index 0.) (3 body)

(ii) Reziduum v bodě z_1 je $-3^{-7/3}e^{\frac{5}{9}\pi i}$, reziduum v bodě z_2 je $-3^{-7/3}e^{\frac{5}{3}\pi i}$, reziduum v bodě z_3 je $-3^{-7/3}e^{\frac{25}{9}\pi i}$. (6 bodů)

(iii) Zmíněný křivkový integrál je tedy roven
$$-2\pi i\cdot 3^{-7/3}(e^{\frac{5}{9}\pi i} + e^{\frac{5}{3}\pi i} + e^{\frac{25}{9}\pi i}) = -2\pi i \cdot 3^{-7/3}(e^{\frac{5}{9}\pi i} - e^{\frac{2}{3}\pi i} + e^{\frac{7}{9}\pi i}).$$
(1 bod)

4) Provedeme limitní přechod pro $R\to\infty$. Integrály přes obě svislé úsečky mají limitu 0, integrál přes $[-R,R]$ má limitu I, integrál přes $[R+2\pi i, -R+2\pi i]$ má limitu $-e^{\frac{5}{3}\cdot 2\pi i}I = -e^{\frac{4}{3}\pi i}I$. (3 body)

5) Dostáváme tedy $I = -2\pi i\cdot 3^{-7/3}\frac{e^{\frac{5}{9}\pi i} - e^{\frac{2}{3}\pi i} + e^{\frac{7}{9}\pi i}}{1-e^{\frac{4}{3}\pi i}}$, odkud spočteme výsledek (usměrníme, roznásobíme čitatele a následně vyjádříme pomocí goniometrických funkcí). (3 body)

Příklad 3: Výsledek: $-\frac{5\pi^2e^{-\pi}+13\pi e^{-\pi}+16\pi}{100}$.

Postup a orientační bodové hodnocení:

1) Integrál konverguje (dokonce absolutně): Integrovaná funkce je spojitá na $[0,+\infty)\setminus\{\frac{1}{2}\}$, v bodě $\frac{1}{2}$ má vlastní limitu (protože jmenovatel má kořen násobnosti 1 a čitatel má kořen), u $+\infty$ lze použít srovnávací kritérium. (1 bod)

2) Integrovaná funkce je sudá, proto integrál ze zadání je roven polovině integrálu přes $\mathbb{R}$. (1 bod)

3) Položme $g(z) = \frac{e^{i\pi z}}{(4^2-1)(z^2+1)^2}$. Pak g je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-i,i\}$. V bodech $\pm\frac{1}{2}$ má g póly násobnosti 1, v bodech $\pm i$ má póly násobnosti 2. (2 body)

4) Uvažme křivku $\varphi_{r,R} = \psi_R \dotplus [-R,-\frac{1}{2}-r] \dotplus (\dot{-}\eta_r) \dotplus [-\frac{1}{2}+r,\frac{1}{2}-r] \dotplus (\dot{-}\theta_r) \dotplus [\frac{1}{2}+r,R]$, kde $R>1$, $r\in(0,\frac{1}{2})$, $\psi_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, $\eta_r(t) = -\frac{1}{2}+re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, $\theta_r(t) = \frac{1}{2}+re^{it}$, $t\in[0,\pi]$. (2 body)

5) Podle reziduové věty spočteme $\int_{\varphi_{R,r}} g$: Z pólů určených v bodě 3) je „uvnitř" pouze bod i (v něm je index 1, v ostatních třech je index 0). Integrál je tedy roven $2\pi i \operatorname{res}_i f$. Residuum v bodě i je rovno $ie^{-\pi}\cdot\frac{5\pi+13}{100}$ (spočte se jako hodnota derivace funkce $\frac{e^{i\pi z}}{(4z^2-1)(z+i)^2}$ v bodě i), máme tedy $\int_{\varphi_{R,r}} g = -\pi e^{-\pi}\cdot\frac{5\pi+13}{50}$ (3 body)

6) Provedeme limitní přechod pro $R\to\infty$ a $r\to 0+$:

(i) $\int_{\psi_R} g \to 0$ pro $R\to\infty$ podle Jordanova lemmatu. (2 body)

(ii) $\lim_{r\to 0+}\int_{\eta_r} g = \pi i \operatorname{res}_{-\frac{1}{2}} g$ podle jistého lemmatu (g má v $-\frac{1}{2}$ pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $\frac{4}{25}i$, limita je tedy $-\frac{4}{25}\pi$. (2 body)

(ii) $\lim_{r\to 0+}\int_{\theta_r} g = \pi i \operatorname{res}_{\frac{1}{2}} g$ podle téhož lemmatu (g má v $\frac{1}{2}$ pól násobnosti 1). Reziduum je rovno $\frac{4}{25}i$, limita je tedy $-\frac{4}{25}\pi$. (2 body)

(iii) Reálná část integrálu přes tři úsečky z definice $\varphi_{r,R}$ má limitu (pro $R\to\infty$ a $r\to 0+$) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{(4x^2-1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$. (2 body)

7) Kombinací předchozího – výsledků z bodu 5) a 6) a bodu 2) dostaneme výsledek. (3 body)