Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2019-2020

Příklad 1 : Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\sqrt[n]{n^{2n} + (2n)^n}}{\sqrt[n]{n^{3n} + (3n)^n}} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Spočtěte limitu:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin x - \cos x}} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 3 : Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x-1) \cdot \left|\operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi^2}{16}\right|$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(9 bodů)

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x \cdot \exp\left(\frac{1}{x^2-2}\right). \qquad \text{(17 bodů)}$$

Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (B)
ZS 2019-2020

Příklad 1: 1 (lze použít větu o policajtech)
Příklad 2: $e^{\sqrt{2}}$
Příklad 3: $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{\left|\operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi^2}{16}\right|}{1+(x-1)^2} + \operatorname{arctg}(x-1) \cdot \operatorname{sgn}\left(\operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi^2}{16}\right) \cdot \frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. $f'_-(-1) = \frac{\pi}{4}\operatorname{arctg} 2$, $f'_+(-1) = -\frac{\pi}{4}\operatorname{arctg} 2$, $f'(1) = 0$.
Příklad 4: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, f je spojitá v každém bodě D_f. f je lichá, proto většinu údajů uvádíme na $\langle 0, +\infty)$ (tedy na $\langle 0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. $f(0) = 0$, limita v $\sqrt{2}$ zleva je nula, zprava $+\infty$, limita v $+\infty$ je $+\infty$. Funkce f je rostoucí na $\langle 0, \sqrt{3-\sqrt{5}}\rangle$ (díky lichosti tedy na $\langle -\sqrt{3-\sqrt{5}}, \sqrt{3-\sqrt{5}}\rangle$), klesající na $(\sqrt{3-\sqrt{5}}, \sqrt{2})$, klesající na $(\sqrt{2}, \sqrt{3+\sqrt{5}}\rangle$, rostoucí na $\langle \sqrt{3+\sqrt{5}}, +\infty)$. V bodě $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ je lokální maximum, v bodě $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ je lokální minimum. $H_f = (-\infty, -f(\sqrt{3+\sqrt{5}})\rangle \cup \langle -f(\sqrt{3-\sqrt{5}}), f(\sqrt{3-\sqrt{5}})\rangle \cup \langle f(\sqrt{3+\sqrt{5}}), +\infty)$ (není těžké ověřit, že $f(\sqrt{3+\sqrt{5}}) > f(\sqrt{3-\sqrt{5}})$). Funkce f je konkávní na $\langle 0, \sqrt{\sqrt{21}-3}\rangle$, konvexní na $\langle \sqrt{\sqrt{21}-3}, \sqrt{2})$, konvexní na $(\sqrt{2}, +\infty)$; inflexní body jsou 0, $\sqrt{\sqrt{21}-3}$ (a $-\sqrt{\sqrt{21}-3}$). Asymptota v $+\infty$ je $y = x$.
Graf: